Transformări Geometrice

Autor: Negruşeri Cosmin

În acest articol vom introduce câteva noțiuni legate de transformări geometrice care se pot dovedi utile în concursurile de programare.

Mai întâi prezentăm nişte aspecte teoretice, mare parte dintre ele nu sunt foarte interesante şi probabil sunt conținute şi în manualele de liceu. Cititorul poate trece direct la probleme şi în măsura în care noțiunile din soluții îi sunt neclare poate reveni asupra părții teoretice.

Translația

Translația unei figuri geometrice reprezintă mişcarea tuturor componentelor ei pe o anumită distanță şi direcție. Această transformare poate fi uşor caracterizată de un vector v = (dx, dy). Când vrem să translatăm un punct P(x, y) după v, e de ajuns să facem operația P' = P + v, deci P' are coordonatele (x + dx, y + dy).

Proprietăți:
- păstrează distanțele
- pastrează orientarea poligoanelor (adică, dacă vârfurile poligonul sunt parcurse în ordine trigonometrică, atunci varfurile corespondente din poligonul transformat vor fi şi ele în ordine trigonometrică)
- păstrează unghiurile
- o dreaptă va fi transformată în altă dreaptă paralelă cu prima
- în afară de translația trivială de vector v = (0, 0), această transformare nu are puncte fixe (adică orice punct va fi transformat într-un punct diferit)
- translații successive vor rezulta tot într-o translație (adică dacă vrem să translatăm un punct dupa v şi apoi după v1 atunci obținem acelaşi rezultat dacă translatăm direct după v + v1)
- translația este comutativă

Simetria

Există două tipuri de simetrii, simetria față de un punct şi simetria față de o dreaptă.

Un punct A îl are simetric pe A' față de un punct O, dacă segmentul AA' are ca mijloc punctul O. Dacă avem un punct (x0, y0) căruia vrem să îi aflăm simetricul față de un punct de coordonate (x, y) atunci acesta va fi (2x – x0, 2y – y0).

Proprietăți:
- păstrează distanțele
- păstrează orientarea poligoanelor (adică, dacă varfurile poligonul sunt parcurse în ordine trigonometrică, atunci vârfurile corespondente din poligonul transformat vor fi şi ele în ordine trigonometrică)
- păstrează unghiurile
- drepte paralele vor fi transformate în drepte paralele
- are ca punct fix punctul O, şi drepte fixe care trec prin punctul O
- simetrii succesive după centre diferite O1(x1, y1) O2(x2, y2) sunt o translație de vector v = 2(x2 – x1)
- simetriile după un punct nu comută

Dacă iar dacă avem un punct P(x0, y0) şi vrem să îi aflăm simetricul faţa de o dreaptă de ecuaţie ax + by + c = 0, notăm cu d distanţa de la punctul P la dreaptă (d = |a * x0 + b*y0 + c|/(sqrt(a*a + b*b))) , avem că simetricul P' are coordonatele (x0+2*a*t,y0+2*b*t).

Proprietăţi:
- păstrează distanţele
- nu păstrează orientarea poligoanelor (adică, dacă varfurile poligonul sunt parcurse în ordine trigonometrică, atunci vârfurile corespondente din poligonul transformat vor fi în sens orar)
- păstrează unghiurile
- drepte paralele vor fi transfirmate în drepte paralele
- are ca puncte fixe dreapta de simetrie
- simetrii succesive după drepte paralele sunt o translaţie
- simetrii succesive după drepte concurente sunt rotaţii
- simetriile nu comută

Rotaţia
Aceasta este o transformare care roteşte punctele în sens trigonometric în jurul unui punct numit centru de rotaţie după un unghi fixat numit unghi de rotaţie.
Dacă avem rotaţia de centru O(x0, y0) şi unghi alfa, atunci imaginea unui punct P(x, y) va fi P'(x0 + (x – x0) * cos alfa - (y – y0) * sin alfa, y0 + (x – x0) * sin alfa + (y – y0) * cos alfa)

Proprietăţi:
- păstrează distanţele
- păstrează orientarea poligoanelor
- păstrează unghiurile
- drepte paralele vor fi transfirmate în drepte paralele
- daca nu este o rotaţie trivială de unghi 0 atunci are ca punct fix centrul de rotaţie, nu are drepte fixe, dar are cercuri fixe centrate în centrul de rotaţie
- două rotaţii succesive R1(O1, alfa) şi R2(O2, beta) se compun în o translaţie sau o rotaţie R3(O3, alfa + beta)
- în general rotaţiile nu comută

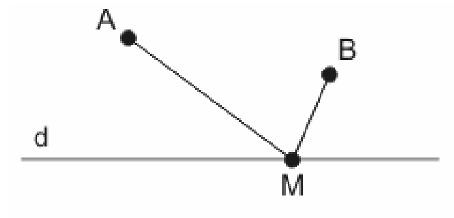
Omotetia

Aceasta este o transformare ce scaleaza obiectele în funcţie de un centru de omotetie şi un raport. Un punct P(x, y) transformat după o omotetie H(O(x0, y0), k) (centru O şi raport k) va avea imaginea P'(x0 + k*(x-x0), y0 + k*(y-y0)).

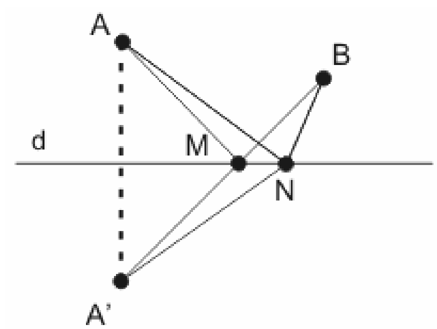
Proprietăţi:
- nu păstrează distanţele
- păstrează orientarea poligoanelor
- păstrează unghiurile
- drepte paralele vor fi transfirmate în drepte paralele, şi transformata unei drepte va fi paralelă cu dreapta
- are ca punct fix centrul de omotetie
- două rotaţii omotetii succesive H1(O1, k1) şi H2(O2, k2) se compun în o translaţie sau omotetie H3(O3, k1 + k2)
- în general omotetiile nu comută

Desfăşurarea în plan

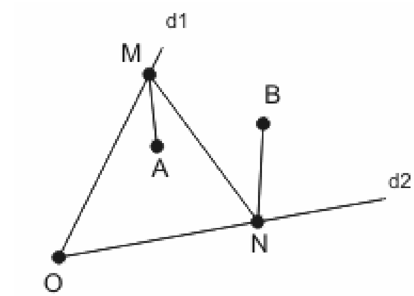
Aceasta nu e o transformare geometrică propriuzisă ci mai mult o tehnică folositoare în rezolvarea unor probleme, o puteți vedea aplicată în problemele ....



Problema 1:
Fie două puncte *A* şi *B* de aceiaşi parte a unei drepte *d*. Se cere să se determine un punct *M* pe dreapta *d* cu proprietatea că suma *AM* + *MB* e mininimă.

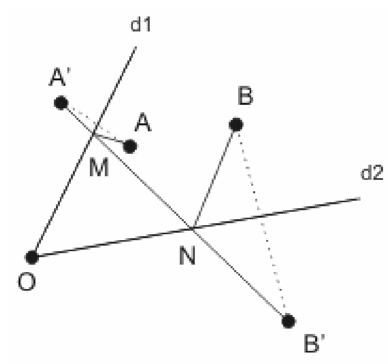


Rezolvare:
Ducem simetricul punctului *A* față de dreapta *d* pe care îl notăm cu *A'*. Oricare ar fi un punct *N* pe dreapta *d*, *AN* = *A'N* pentru că triunghiul *AA'N* este isoscel având dreapta *d* şi înălțime şi mediană. Astfel avem că *AN* + *NB* = *A'N* + *NB* deci pentru ca să minimizăm suma *AM* + *MB* trebuie de fapt să minimizăm suma *A'M* + *MB* , punctele *A'* şi *B* sunt situate de părți diferite ale dreptei deci punctul *M* trebuie situat la intersecția segmentului *A'B* cu dreapta *d*.



Problema 2:
Fie două puncte *A* şi *B* în interiorul unui unghi format de semidreptele *d1* şi *d2* care au capătul comun O. Se cere să se determine două puncte *M* şi *N* asfel ca *M* să aparțină lui *d1* şi *N* să apațină lui *d2* iar suma *AM* + *MN* + *NB* să fie minimă.

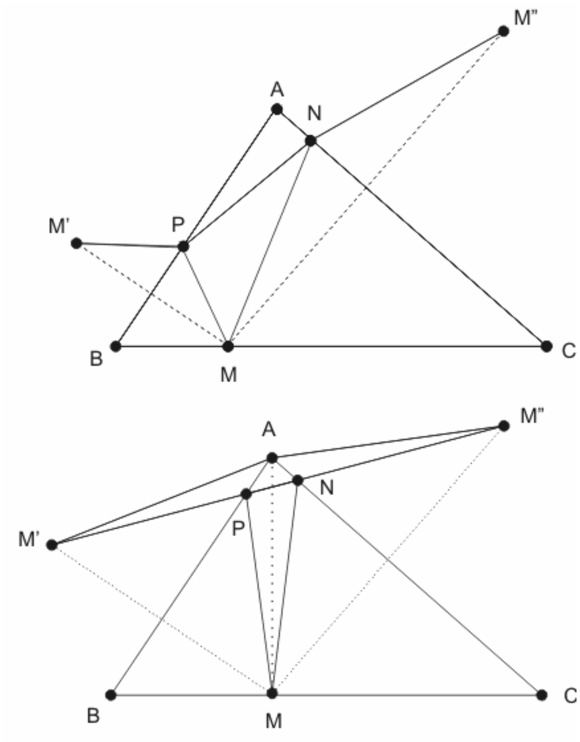
Rezolvare:



Folosim aceeaşi idee, ducem simetricul punctului *A* ,notat cu *A'*,față de dreapta *d1* şi simetricul punctului *B* notat cu *B'* față de dreapta *d2*. Orice puncte *M* şi *N* am alege avem că *AM* + *MN* + *NB* = *A'M* + *MN* + *NB*, pentru ca să minimimizăm suma *A'M* + *MN* + *NB'* trebuie ca *M* şi *N* să fie intersecțiile segmentului *A'B'* cu semidreptele *d1* şi *d2*.

Problema 3:
Dându-se un triunghi ascuțitunghic ABC se cere să se determine un triunghi înscris în acesta de perimetru minim.

Rezolvare:

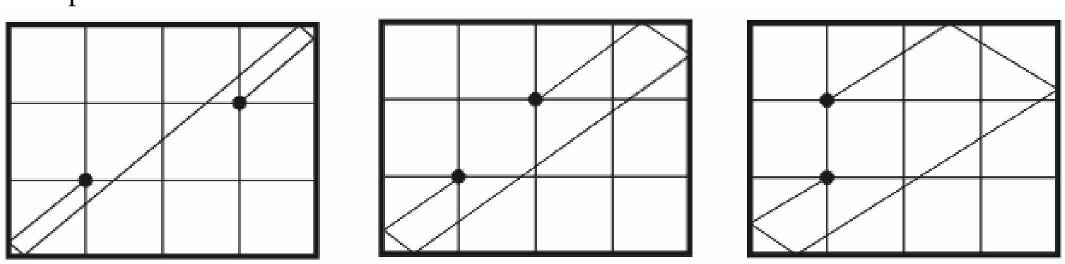


Luăm un punct M pe baza BC a triunghiului ABC, un punct P pe latura AB şi un punct N pe latura AC. Dacă avem M' simetricul lui M față de AB şi M'' simetricul lui M față de AC, atunci MN + NP + PM = M''N + NP + PM'. Ca să minimizăm această sumă, punctele P şi N trebuie să fie la intersecția segmentului M'M'' cu laturile AB respectiv AC. Perimetriul triunghiului MNP va fie egal cu lungimea segmentului M'M''. Observăm că unghiul M'AM'' are măsura egală cu 2 * măsura unghiului BAC şi că triunghiul M'AM'' e isoscel de latură egală cu AM. Pentru ca M'M'' să aibă lungime minimă trebuie ca AM să fie cât mai scurt, acest segment este minim atunci când M este piciorul înalțimii din A. La fel putem să deducem că N este piciorul înălțimii din B, iar P este piciorul înălțimii din C. Astfel soluția de perimetru minim este triunghiul ortic.

Problema 4:

Se consideră un dreptunghi cu colțurile de coordonate (0, 0) , (a, 0), (a, b), (0, b). Mai considerăm două puncte A şi B de coordonate ($x1$, $y1$) şi ($x2$, $y2$) în interiorul dreptunghiului. Se cere să se determine lungimea minimă a unei linii frânte ce porneşte undin A ajunge în B şi intersectează fiecare latură a dreptunghiului.

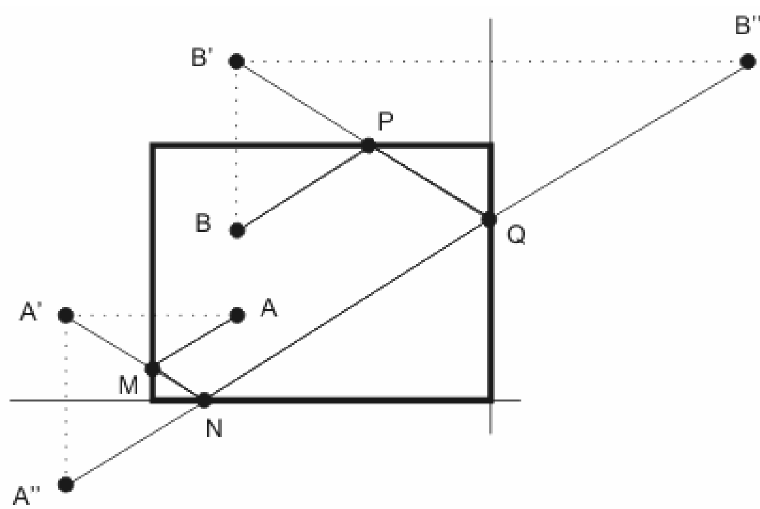
Exemple:



În figură avem un dreptunghi de dimensiuni 4x3 şi trei posibilități de a plasa două puncte în interiorul dreptunghiului, împreună cu soluțiile optime. Rezultatele pentru cele trei exemple sunt: 7.8102, 8.6023 respectiv 9.4339.

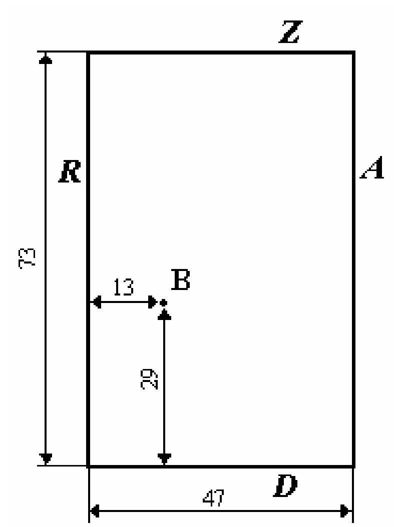
(PolyLine TopCoder)

Rezolvare:

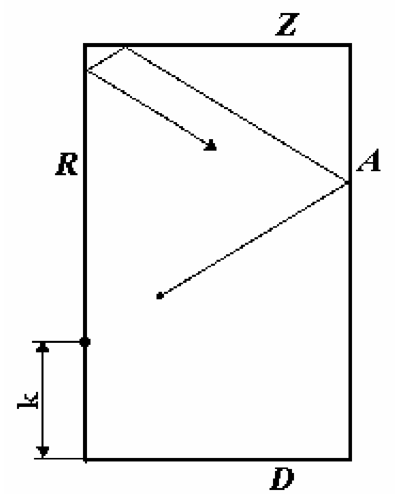


Este evident că o soluție optimă va fi formată din cinci segmente. Putem încerca toate ordinele posibile a drumului liniei frânte, sunt 4! = 24 asemenea ordini. Pentru fiecare ordine căutăm drumul optim. Acesta poate fi găsit folosind trucul prezentat în problemele anterioare. Să luăm un exemplu: pentru punctele A(1, 2) şi B(1,3) şi dreptunghiul de dimensiuni 4 şi 3 luăm punctele M, N, P, Q pe laturile din stânga, jos, dreapta respectiv sus a dreptunghiului, vrem să minimizăm suma *AM* + *MN* + *NP* + *PQ* + *QB*. Acum vom duce simetricul lui A, notat cu A', faţă de latura din stânga şi simetrucul lui B, notat cu B', faţă de latura de sus. Avem că AM = A'M şi QB = QB', deci ca să minimizăm suma AM + MN + NP + PQ + QB trebuie să minimizăm suma A'M + MN + NP + PQ + QB'.Acum ducem simetricul lui A', notat prin A'', faţă de latura de jos şi simetricul lui B', notat prin B'', faţă de latura din dreapta. Avem că A'M + MN <= A''N şi că PQ + QB' <= QB'', deci obţinem că pentru a minimiza suma AM + MN + NP + PQ + QB trebuie să minimizăm suma A''M + MN + NB'', putem realiza acest obiectiv dacă M şi N vor fi intersecţiile segmentului A''B'' cu latura de jos respectiv latura din dreapta a dreptunghiului, iar soluţia este exact distanţa de la A'' la B''.

Problema 5:

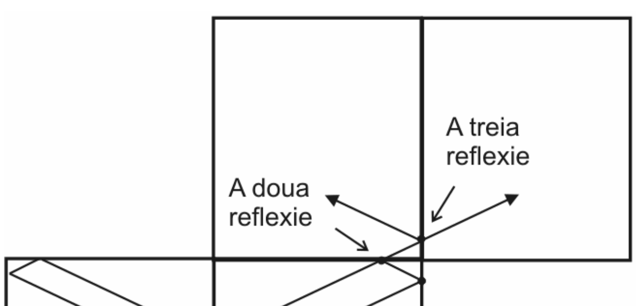


Laturile unui teren dreptunghiular de biliard de dimensiuni 43 x 73 sunt etichetate cu literele A, R, Z, D. O bilă B (dimensiunile căreia pot fi ignorate) este plasată în interiorul acestui teren, la 13 centimetri distanţă de latura R şi la 29 de centimetri distanţa de latura D. Un jucător îşi pune tacul pe latura r la un punct ce e situate la **k** centimetri distanta de latura D şi loveşte direct bila B. Bila se mişcă drept şi dacă e cazul loveşte marginile terenului. Mişcarea bilei se supune legilor fizicii, astfel cănd bila se loveşte de margine ea va avea o traiectorie simetrică faţa cu traiectoria iniţială faţă de dreapta perpendiculară pe margine în punctual de impact. O parte din traiectoria bilei o puteţi vedea în figură. Problema esta pentru un număr fix k (0 <= k <= 73) şi n (0 <= n <= 10^9) să se deternube distanţa bilei faţa de latura R şi distanţa faţă de latura D, după ce bila s-a deplasat exact n centimetri.



(Olimpiada Letonă, 1997)

Rezolvare:

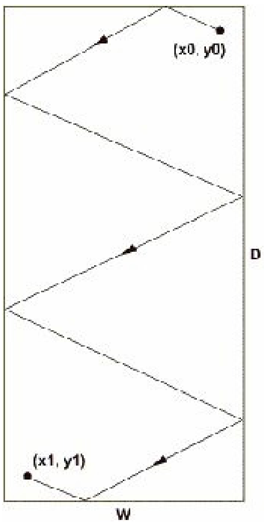


O rezolvare bazată pe simularea mişcarii bilei pare anevoioasă, iar din cauza faptului că n poate fi foarte mare, acest algoritm nu este eficient.

O rezolvare elegantă este următoarea:

Mai întâi umplem planul cu o grilă infinită de dreptunghiuri de dimensiuni 43 x 73. Dacă am lasa ca bila să îşi continue mişcarea şi ignorăm prima lovire a marginii, în terenul adiacent, atunci traiectoria bilei ar fi de la trecerea marginii simetrică cu traiectoria normală a bilei deci este ca şi cum am reflecta întreaga tablă. Acest fenomen se repetă de fiecare dată cand atingem o margine. Astfel dacă ducem un segment pe directia de deplasare a bilei, ce pleacă din B, de lungime n, şi se termină în C atunci putem vedea în ce dreptunghi este el inclus, şi în funcţie de acest dreptunghi să transformăm punctul C în poziţia finala a bilei în dreptunghiul iniţial.

Problema 6:

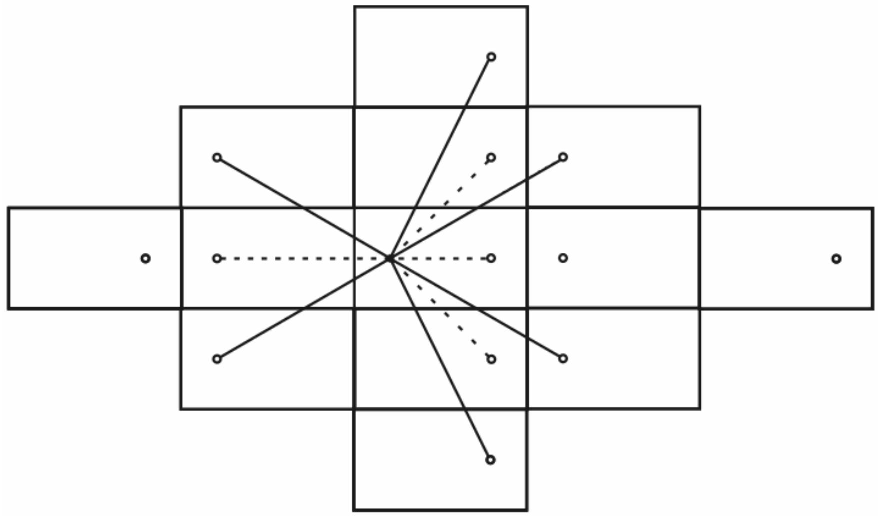


Programatorului Vasile îi place să se plimbe prin biroul lui dreptunghiular. El începe drumul din locul unde este situat biroul lui şi se plimbă păna când crede că ar trebui să se apuce de lucru din nou. Drumul lui urmează legea de mişcare dată de "unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie". Vasile se mişcă de la zid la zid în linie dreaptă. Şeful direct al lui Vasile este interesat cât tim pierde acesta în plimbările lui. Este uşor să aflăm timpul, împărţind distanţa parcursă la viteza medie a lui Vasile (aceasta a fost deja calculată de şef), deci trebuie să se afle distanţa parcursă. Se ştie ordinea în care au fost atinşi pereţii pentru că Vasile fiind neatent se loveşte de pereţi şi astfel se aud bufniturile în fiecare zid. Se dau dimensiunile camerei lui Vasile W şi D (0 <= W, D <= 100), poziţia iniţială, poziţia finală şi secvenţa de litere N, S, E, V care este ordinea în care sunt atinşi peretii, de exemplu în imagine pereţii sunt atinşi în ordinea NVEVES. Numărul de coliziui nu depăşeste 1000, poziţiile iniţiale şi finale nu se afla pe marginile dreptunghiului, iar drumul lui Vasile nu va trece prin vreun colţ al încaperii. (timus Pool)

Rezolvare:
Ca şi la problema anterioară, când Vasile atinge un perete mişcarea lui se oglindeşte faţă de mişcarea normală. Vom procesa fiecare instrucţiune din şirul în care e prezentată ordinea atingerii pereţilor. O instrucţiune va însemna o reflexie a dreptunghiului curent şi a punctului de destinaţie a lui Vasile, după ce am procesat toate coliziunile obţinem dreptunghiul final şi punctul de destinaţie transformat în interiorul acestui dreptunghi. Acum linia frântă care unea punctul de start s-a transformat într-un segment de dreaptă între punctul de start şi imaginea punctului final după ce s-a realizat asupra lui seria de transformări.

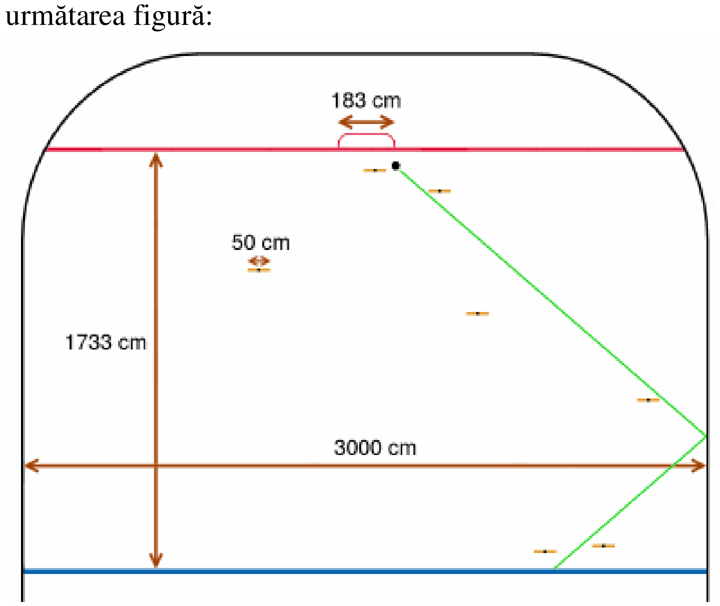
Problema 7:
Pe o masă de biliard de dimensiuni 2000x1000 sunt aşezate două bile la coordonate întregi. Se cere să se determine numărul de posibilităţi de lovire a primei bile, astfel ca ea să lovească exact de N ori manta (1 <= N <= 500) şi apoi să lovească cea de a doua bilă. Mişcarea bilei se consideră ideală, iar dacă bila loveşte un colţ se consideră că s-au atins doua menţi şi bila se va mişca pe aceiaşi direcţie în sens opus.
(NCushion, TopCoder)

Rezolvare:
Soluţia folosețte ideea de mai sus de a reflecta tabla de biliard împreună cu poziţia celei de a doua bilă. Aşa cum am văzut în problema anterioară fiecare şir de atingeri ale menţilor ne dă exact un mod în care prima bilă poate lovi pe cea de a doua bilă. Dacă ştim în ce dreptunghi reflectat vrem să lovim bila a doua, fixând acest dreptunghi, avem o direcţie fixată şi un şir de menţi fix pe care le va atinge bila dacă va fi lovită în acea direcţie. În următoarea figură avem un desen pentru cazul în care trebuie să lovim exact două menţi înainte să atingem a doua bilă.



În desen am colorat cu negru bila înițială şi cu alb a doua bilă şi imaginile ei. Cu linie punctată am desenat traiectoriile care ar fi atins bila a doua fără a atinge de două ori manta şi cu linie neagră direcțiile pe care manta ar fi atinsă exact de două ori.
Observăm că pentru a atinge manta de n ori o bilă trebuie să intre în n alte dreptunghiuri, deci dacă pozițiilor dreptunghiurilor le ar fi asociat un sistem de coordonate în care dreptunghiul inițial are coordonatele (0, 0). Am vazut că o soluție este asociată cu un dreptunghi, pentru ca bila să atinga exact N menți, coordonatele (x, y) ale dreptunghiului trebuie să satisfacă egalitatea |x| + |y| = N. Mai trebuie să avem grijă ca drumul bilei, deşi atinge N menți, să nu atingă a doua bilă înainte de atingerea tuturor menților. Aceste observații ne duc la următoarea soluție: pentru toate dreptunghiurile (x, z) care satisfac proprietatea |x| + |y| < N păstrăm într-o structură de date (structura preferată de autor ar fi un tabel de dispersie) vectorul asociat direcției pe care ar fi trebuit lovit[prima bilă pentru a ajunge la imaginea celei de a doua bile din acest dreptunghi, apoi pentru fiecare dreptunghi pentru care |x| + |y| = N, dacă direcția asociată lui nu este în structura de date, incrementăm numărul de soluții. Această rezolvare are complexitatea O(n^2 log n) pentru că normalizarea unei direcții implică folosirea algoritmului lui euclid ce are complexitate O(log n).

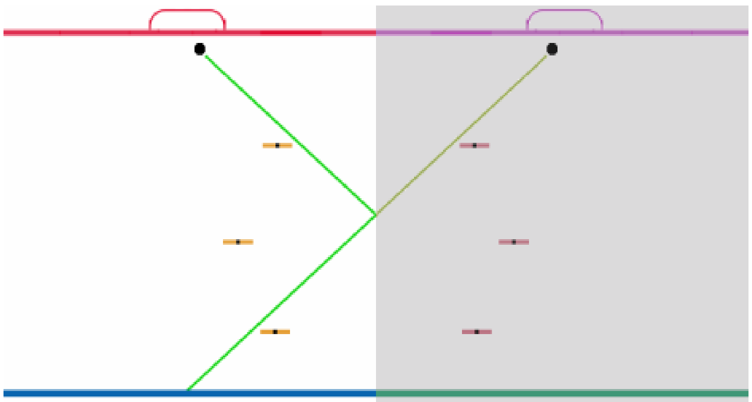
Problema 8:
Un jucător de hockey stângaci are o mişcare în care de la mijlocul terenului izbeşte puc-ul de marginea terenului care apoi întră în spațiul porții. Structura unui teren de hockey este prezentată în următarea figură:



Terenul este de 3000 de centimetri în lățime. Distanța între linia de mijloc şi linia de gol este 1733 de centimetri. Poarta este centrată pe linia de gol şi are dimensiunea de 183 de centimetrii. Când jucătorul loveşte, puc-ul va lovi în marginea terenului şi apoi ricoşa simetric în poartă. Pucul şi

stâlpii porții vor fi considerate puncte. Pe gheață vor fi cel mult nouă jucători care vor fi modelați ca segmente orizontale de lungime de 50 de centimetri. Pentru ca lovitura să aibă succes, traiectoria ei nu trebuie să întersecteze nici un jucător. Pentru simplitate, puteți presupune că terenul este perfect dreptunghiular.Se cere unghiul format de lovitura jucătorului cu linia de mijloc, astfel ca lovitura să fie cu succes şi puc-ul să intre în poartă şi să fie cât mai apropiat de stâlpul drept al porții.
(PuckShot, TopCoder)

Rezolvare:



O rezolvare posibilă ar fi să pornim cu o lovitură de un unghi fixat şi să vedem dacă ajunge în poartă, iar apoi să creştem unghiul loviturii puțin câte puțin. Prin folosirea unor considerații de simetrie putem rezolva problema mai uşor şi mai eficient. Oglindim terenul împreună cu toți jucătorii, astfel transformăm lovitura din două segmente în unul singur care trece prin dreapta de simetrie. Acum luăm fiecare punct lateral al jucătorilor, fiecare punct lateral al imaginii reflectate ale jucătorilor şi punctele porții reflectate, şi unim aceste puncte cu punctul de unde jucătorul va lovi pucul. Verificăm care dintre aceste drepte dacă sunt rotite foarte puțin la dreapta sau la stânga intersectează imaginea porții reflectate şi nu intersectează segmentele ce reprezintă jucătorii sau imaginea lor reflectată. Astfel soluția noastră are complexitatea O(N^2) unde N este numărul de jucători, pentru că pentru fiecare dintre cele 4N + 2 raze trebuie să verificăm intersecția cu 2N + 1 segmente. Pe această idee putem realiza o soluție în O(n log n) folosind o linie de baleere care trece prin punctul inițial si se mişcă circular în jurul lui.

Problema 9:

Gigel a desenat pe hârtie un poligon (nu neapărat convex şi care se poate chiar autointersecta) cu N vârfuri şi a marcat mijlocul fiecărei laturi. Fratele lui, însa, a şters poligonul desenat, pe hârtie rămânând marcate numai mijloacele laturilor. Gigel ar dori, totuşi, să redeseneze poligonul, aşa cum era el inițial. Se consideră ca poligonul are vârfurile numerotate de la 1 la N, în ordinea in care apar pe conturul poligonului. Cu această numerotare a vârfurilor, se defineşte şi o numerotare a laturilor. Latura i (1≤i<N) este segmentul ce uneşte vârfurile i si i+1. Latura N uneşte vârfurile 1 si N.
Dându-se coordonatele mijloacelor laturilor unui poligon, determinați coordonatele vârfurilor sale.
(Poligon2 info-arena şi .campion, ewds)

Rezolvare:

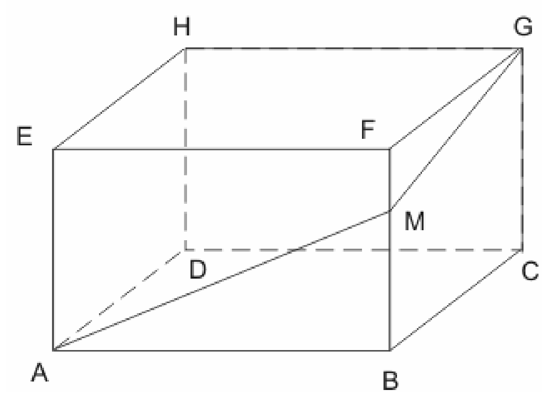
Rezolvăm problema mai întâi pentru N par. Luăm primul vârf al poligonului, şi âi determinăm simetricul față de primul mijloc de latură, aşa găsim al doilea vărf, dacă luăm al doilea vârf printr-o simetrie îl obşinem pe al treilea ş.a.m.d. Deci prin n simetrii obşinem din nou primul punct. Cum N este par fiecare două simetrii compuse sunt o translație, deci avem o serie de translații care se compun într-una care duce punctul inițial în punctul inițial. Aşa cum am vazut la partea teoretică translația are un punct fix doar dacă ea e translație trivială. Translația fiind trivială, putem porni cu orice punct din plan şi să obținem celelalte n+1 puncte din poligon ca şi rezultate ale simetriilor aplicate sucesiv.
În cazul în care N e impar transformarea explicată mai sus are ca rezultat compunerea între o translație şi o simetrie, compunere care aşa cum puteți verifica are ca rezultat o simetrie de alt centru. Dar punctul inițial este transformat în acelaşi punct, deci el trebuie să fie centrul de simetrie

al transformarii compuse, şi atunci luăm un punct oarecare P în plan, efectuăm cele n transformări asupra lui şi vom obţine un punct P' şi primul punct al poligonului va fi mijlocul acestui segment.

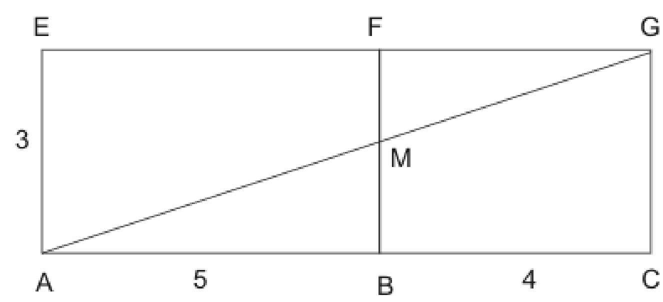
Problema 10:
Se dau N (1 <= N <= 1500) puncte de coordinate întregi. Să se determine numărul de axe de simetrie al sistemului de puncte.
(Stelele Informaticii, 2005)

Rezolvare:
Axele de simetrie ale sistemului de puncte trebuie să fie şi axe de simetrie pentru poligonul ce reprezintă înfăşurătoarea convexă a acestor puncte. Dacă vrem să găsim axele de simetrie ale unui poligon convex, observăm că dacă el are număr par de vârfuri, atunci trebuie ca acestea sau să fie mediatoare pentru o latura a poligonului, sau să treacă prin două vârfuri. Dacă el are număr impar de laturi atunci axele de simetrie trebuie să fie mediatoare pentru o latură şi să treacă printr-un punct al poligonului. Astfel, după calcularea în O(n log n) a înfăţurătorii convexe, putem afla în timp O(n) care sunt candidate la axa de simetrie a poligonului. Verificarea faptului dacă o dreaptă este axă de simetrie pentru un set de puncte o putem face în O(n) folosindu-ne de o tabelă de dispersie. Algoritmul de determinare a axelor de simetrie are complexitatea finală O(N^2).

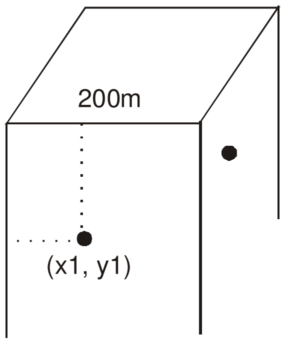
Problema 11:
Se dă un paralelipiped ABCDEFGH, cu AB = 5 BC = 4, AE = 3. Se cere să determinăm poziţia unui punct M ce aparţine segmentului BF cu proprietatea că suma AM + MG este minimă.
(ONM 1997 clasa a VIII a)



Rezolvare:
Pentru această problemă ne putem imagina o soluţie analitică în care vrem să minimizăm funcţia AM + MG care depinde de coordonata y, dar o asemenea rezolvare nu ar fi fost accesibilă unui elev de clasa a VIII-a. O soluţie elegantă şi simplă este următoarea:
Desfăşurăm în plan feţele ABFE şi BCGD, astfel se foroează dreptunghiul ACGE, unde AC = 9 şi AE = 3. Acum este clar că punctul M trebiuie să fie intersecţia diagonalei AG cu FB. De aici putem găsi foarte uşor că BM = 5/3.



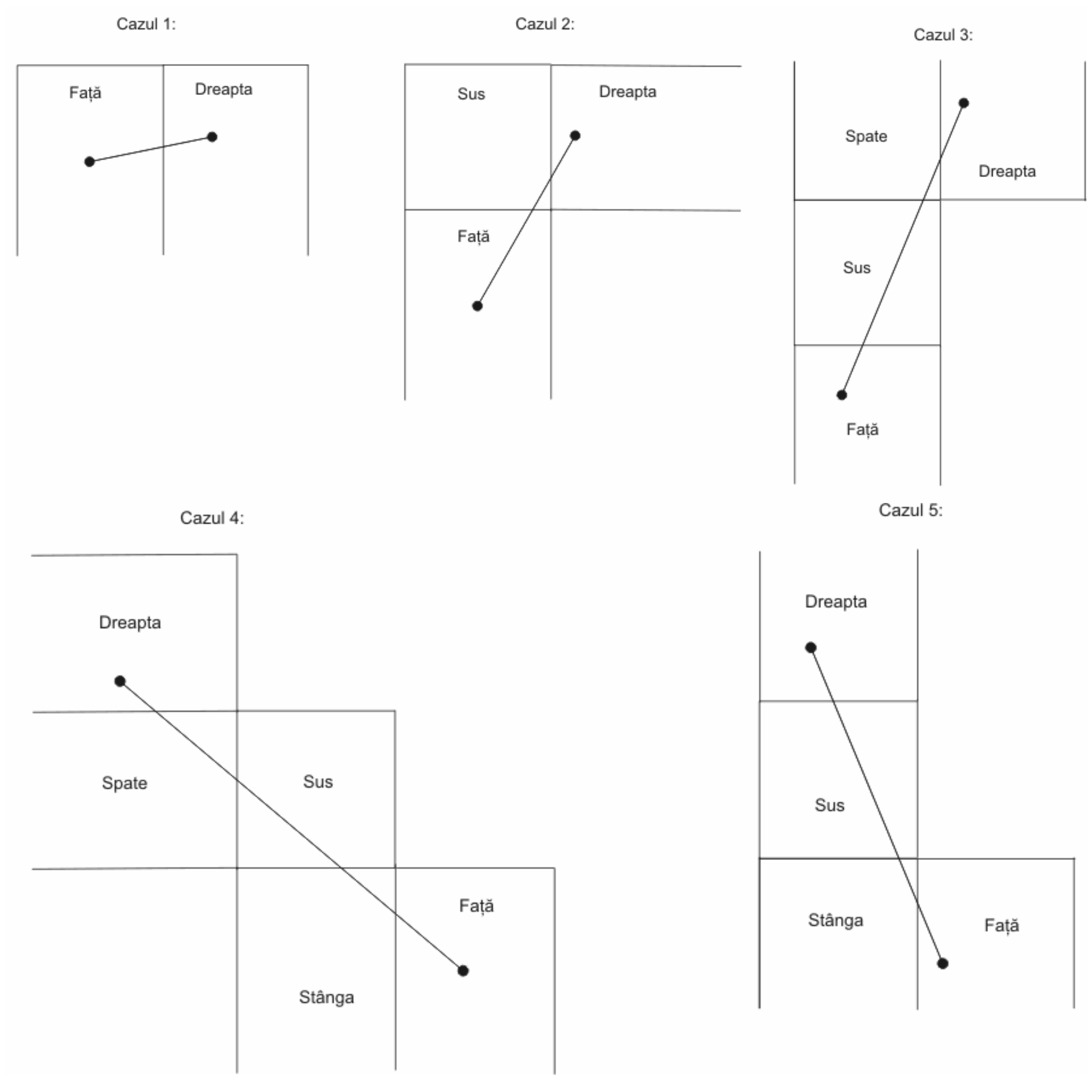
Problema 12:



Pe partea frontală a zgârie-nor foarte înalt, ce are forma unui paralelipiped, cu baza un pătrat de latura 200 de metri, este situat un paianjen. Acesta vrea să manance o muscă situată pe fața din dreapta a zgârie-norului. Ştiind coordonatele paianjenului si ale muştei vi se cere să determinați drumul cel mai scurt pe care îl poate face paianjenul ca să manânce musca iar ântreaga deplasare a lui să fie pe suprafața zgârienorului (coordonatele gângăniilor se măsoară relativ la colțul stânga sus al feței pe care se află fiecare). (TopCoder)

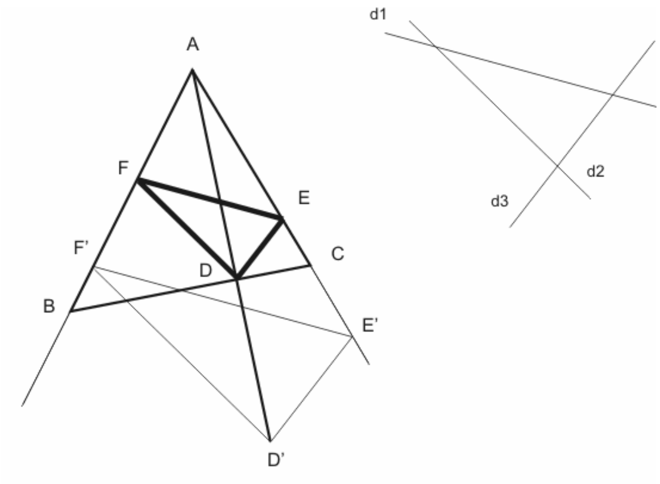
Rezolvare:

Desfăşurăm paralelipipedul în toate modurile posibile (aşa cum vedem în figură) şi alegem dintre toate drumurile soluția optimă.



Problema 13:
Se dă un triunghi *ABC* şi trei drepte *d1*, *d2* şi *d3* care nu sunt paralele între ele două câte două. Se cere să se determine un triunghi înscris în triunghiul *ABC* ce are laturile paralele cu dreptele *d1*, *d2* respectiv *d3*.

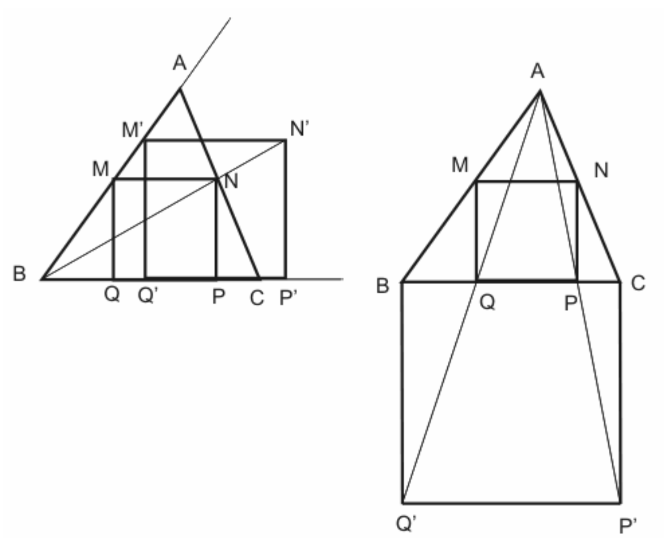
Rezolvare:



Construim un triunghi D'E'F' ce are laturile paralele cu dreptele d1, d2 si d3, iar punctul E' aparține semidreptei [AC şi punctul F' aparține semidreptei [AB. Acum fixăm un punct D în intersecția lui AD' cu BC şi în acest punct ducem două drepte paralele cu dreptele d1 şi d2. Aceste drepte vor intersecta laturile triunghiului în punctele F şi E. În omotetia de centru A şi raport AD/AD' triunghiul D'E'F' se transformă în DEF, care este un triunghi ce respectă condiția din enunț.

Problema 14:
Se dă un triunghi *ABC* vrem să găsim aria maximă a unui pătrat situat în întregime în interiorul triunghiului. În imagine avem un pătrat în interiorul unui triunghi, dar acesta nu este de arie maximă. De exemplu într-un triunghi cu laturile de dimensiuni 6, 6 şi 6 aria maximă este 7.754051. (10725 Triangular Square acm.uva.es)

Rezolvare:
Pornim de la premisa intuitivă că cel mai mare pătrat ce pe poate plasa în interiorul unui triunghi trebuie să aibă una din laturi pe o latură a triunghiului. Astfel pentru a determina pătratul de arie maximă avem trei posibilități de aşezare pe laturile triunghiului. Pentu o aşezare fixată putem afla uşor pătratul maxim din interiorul triunghiului ce are două varfuri pe latura BC. O modalitate ar fi să desenăm un pătrat M'N'P'Q' ce are punctele Q' şi P' pe semidreapta [BC şi punctul M' pe semidreapta [BA, apoi luăm punctul N ca intersecție a dreptei BN' cu AC. Găsim pătratul MNPQ ca fiind omoteticul pătratului M'N'P'Q' după omotetia de centru B şi raport BN/BN'. Altă modalitate de construcție a pătratului ar fi cea prezentată în a doua figură, adică: se construieşte în exterior ,pe latura BC a triunghiului, un pătrat BCQ'P', se determineă punctele P şi Q ca şi intersectii al segmentului AQ' cu BC şi al segmentului AP' cu BC. Pătratul MNPQ va fi omoteticul pătratului BCP'Q', după omotetia de centru A şi raport QP/BC.



Problema 15:
Se dau coordonatele a două vârfuri ale unui poligon regolat de N laturi. Se cere dacă ştiți pe N, cele două perechi de coordonate şi N1, N2 indicii celor două puncte pe poligon, să determinați coordonatele tuturor celo N varfuri.
(arhipelago, sgu)

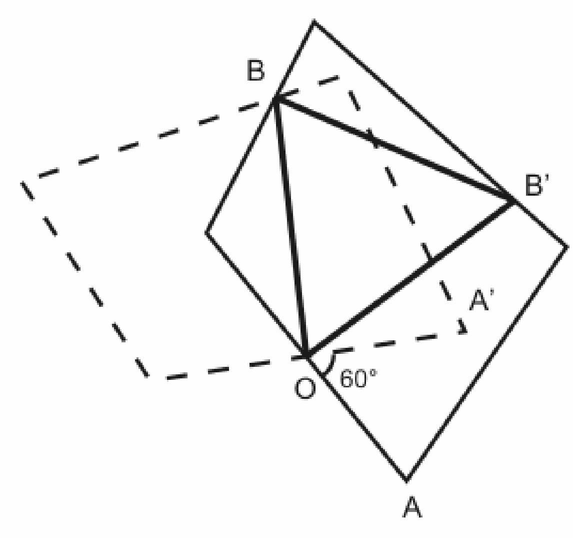
Rezolvare:
Fie O centrul cercului circumscris poligonului regulat, dacă notăm A şi B cele două puncte atunci putem uşor să determinăm măsura unghiului AOB pe care o notăm cu alfa. Triunghiul AOB este isoscel şi ştim că are la baza unghiuri de măsură beta = (180 – alfa)/2. Ca să determinăm punctul O vom roti dreapta AB în jurul lui A după un unghi beta, şi vom roti dreapta AB în jurul lui B după un unghi beta. Cele două drepte ce rezultă din cele două rotații se vor intersecta în punctul O. Astfel am găsit centrul cercului circumscris poligonului, pentru a găsi punctele lui îi aplicăm vârfului A rotațiile de centru O şi unghiuri 360k/n unde k ia toate valorile naturale de la 1 la n.

Problema 16:
Pe laturile unui poligon A1A2…An (vârfurile Ai sunt numerotate în ordine trigonometrică), se construiesc în exterior triunghiurile isosceles AiMiAi+1, iar unghiul AiMiAi+1 = alfai (aici An+1 = Ai). Suma măsurilor unghiurilor alfai nu este multiplu de 360 de grade. Dacă ni se dau n <= 50, coordonatele punctelor Mi şi unghiurile alfai, scrieți un program care ne dă coordonatele varfurilor poligonului.
(timus, geometrical dreams)

Rezolvare:

Aşa cum am văzut în partea teoretică, o compunere de mai multe rotații are ca rezultat o rotație a cărei unghi este suma unghiurilor rotațiilor parțiale. Dacă pornim cu punctul A1 şi îl rotim în jurul lui M1 cu un unghi alfa1, apoi luăm punctul rezultat şi îl rotim în jurul lui M2 cu unghiul alfa2 şi aşa mai departe până când am rotit pe A1 în punctelor M1, M2, .. Mn. Efectuând aceşti paşi vom obține pe rând vârfurile poligonului şi la sfârşit A1 va ajunge din nou şn poziția inițială. Acest procedeu este de fapt o serie de rotații, şi vedem că aplicarea lui asupra lui A1 îl lasă neschimbat, cum suma măsurilor unghiurilor de rotație nu este multiplu de 360 de grade, înseamnă că rotația nu este trivială, iar o rătație netrivială are ca punct fix doar centrul ei. Aşadar putem lua un punct oarecare în plan asupra căruia aplicăm procedeul şi vom obține imaginea lui, folosind aceste două puncte şi alfa = suma de alfai ca unghi de rotație, putem determina centrul A1 de rotație. După care efectuând transformările asupra lui A1 obținem celelalte puncte ale poligonului.

Problema 17:



Se dă un poligon convex de *N* vârfuri (3 <= N <= 700). Se cere să se determine un triunghi echilateral cu varfurile aparținând laturilor poligonului convex.
(Texan, Baraj 2005)

Rezolvare:
Luăm un punct O pe o latură a poligonului, rotim întreg poligonul în jurul acestui punct 60 de grade în sens trigonometric. Poligonul rotit va intersecta poligonul inițial într-un nou punct B. Acest punct B îl rotim în jurul lui O cu 60 de

grade în sens orar, rezultatul este un punct B' care evident aparține poligonului inițial. Acum triunghiul OBB' este echilateral pentru că OB = OB' şi masura unghiului BOB' este de 60 de grade. Menționăm că aceasta a fost una dintre cele mai dure probleme de la selectia lotului de anul acesta.O rezolvare de complexitate O(N^2) a fost de ajuns pentru ca autorul să obțină punctajul maxim la ONIbyNet, dar facem observația că intersecția a două poligoane convexe se poate face în complexitate O(N).

Problema 18

Se dau N puncte în planul euclidian prin coordonatele lor, numere întregi. Apoi se efectueaza M operații asupra tuturor punctelor, într-o ordine data (1 <= N <= 100 000, 0 <= M <= 10 000). O operație poate fi de doua tipuri: de **translație** sau de **rotație**. Într-o operație de **rotație**, punctele sunt rotite în jurul originii cu un anumit număr de grade în sens trigonometric. Într-o operație de **translație**, originea este mutată în alt punct relativ la originea curentă şi coordonatele celorlalte puncte sunt modificate astfel încât să reprezinte aceleaşi puncte relativ la noua origine. Scrieti un program care calculează coordonatele tutoror punctelor dupa cele M operații.
(dotNet, campion 2004)

Rezolvare:

Folosim scrierea operațiilor de translație si rotație ca produs de matrici.
Dacă vrem să rotim punctul (x, y) în jurul punctului de coordonate (0, 0) după un unghi alfa atunci putem scrie:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos alfa & -\sin alfa & 0 \\ \sin alfa & \cos alfa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iar translația o putem scrie ca:

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Astfel transformarea pentru un punct devine un produs de matrici care la sfarsit se înmulţeşte cu un vector ce reprezintă coordonatele punctului pe care vrem să îl transformăm. Pentru că transformarea compusă este aceiaşi pentru fiecare dintre cele N puncte, determinăm matricea care o reărezintă o singură dată şi apoi o putem aplica pe rând fiecărui punct. Algoritmul are complexitatea O(N + M)
Menționăm că o problemă similară apare pe siteul acm.sgu.ru sub numele de wizards, diferența fiind că acolo operațiile sunt în spațiul tridimensional, dar rezolvarea este aproape identică.

Bibliografie

[1] Nicolescu, Boskoff Probleme practice de geometrie, ed tehnică, Bucureşti 1990
[2] www.cut-the-knot.org
[3] acm.timus.ru
[4] infoarena.devnet.ro
[5] acm.uva.es
[6] topcoder.com
[7] Dijkstra's EWDs
[8] acm.sgu.ru