# Numerele lui Josephus

## Introducere

Legendara problemă a lui Josephus, cunoscută sub diferite denumiri şi formulări (problema celor 40 evrei, problema celor 15 creştini şi a celor 15 turci, etc..) a preocupat matematicieni vestiți care au găsit soluții interesante şi generalizări spectaculoase.
Este firesc să enumerăm la început câțiva dintre aceştia:

- Yashida Mitsuyaski - Kyoto 1627-1643
- Seki Takakazu - Osaka 1683
- Leonard Euler 1775- 1776
- H Schubert - Berlin 1895
- E. Busche - Berlin 1896
- P.G. Tait - Cambridge 1900
- R, Rankin - 1948
- S. Uchiyama - 2003

Ultimul a scris un articol valoros [1] pe care l-a publicat în 2003 în memoria prof. Robert Alexander Rankin răpus în ianuarie 2001 după o luptă cumplită cu maladia sec. XX.

## Formularea problemei

In esență: Fie $n$ şi $m$ două numere întregi strict pozitive. Se aranjează într-un cerc $n$ puncte numerotate 1,2,3,.., n ( într-un mod natural, astfel încât punctele adiacente cu 1 sunt 2 şi $n$ ) . Se şterg pe rând fiecare al $m$-lea punct (numărătoarea începând de la primul ) până când toate punctele au fost şterse. Problema constă în a determina al $k$-lea punct care va fi şters, notat $a_m(k,n)$ , numit şi *k-număr Josephus*. Evident, $n,m,k$ date şi $1 \le k \le n$ .

Este clar că:

$$1 \le a_m(k,n) \le n$$

şi

$$a_m(1,n) \equiv m \pmod n$$

O primă metodă de determinare a numerelor $a_m(k,n)$ se bazează pe recurența :

(1) $$a_m(k+1,n+1) \equiv m + a_m(k,n) \pmod{n+1} \quad , 1\le k\le n;$$

şi pe condiția scrisă anterior.

Exemplu:

$$a_4(3,7) = 4 + a_4(2,6) \pmod 7$$
$$a_4(2,6) = 4 + a_4(1,5) \pmod 6$$
$$a_4(1,5) = 4 \quad \text{şi deci,}$$
$$a_4(2,6) = 4 + 4 \equiv 2 \pmod 6 \quad ,$$
$$a_4(3,7) = 4 + 2 \equiv 6 \pmod 7 \quad .$$

Un caz particular şi f. interesant se obține pentru $k=n$. Ultimul numărul Josephus astfel obținut se notează

$$d_m(n) = a_m(n,n) \ , \ n>m\ge 2.$$

Prof. Rankin a obținut o formulă spectaculoasă pentru cazul special $m=2$ şi anume:

(2) $$d_2(n) = 2n + 1 - 2^{i+1} \quad \text{pentru} \quad 2^i \le n < 2^{i+1}.$$

Pentru $m=3$ a găsit un rezultat care apoi s-a dovedit a fi inexact.

Demonstrația pentru stabilirea relației (1) este elegantă: Dacă adăugăm încă un punct notat $n+1$ între $n$ şi 1 şi începem să numărăm pornind de la $b+1$, unde $b$ este determinat astfel:

$$b \equiv -m \pmod{n+1}, \quad 0\le b<n+1.$$

Notăm cu *b(k,n+1)* al **k**-ulea punct eliminat în acest sens. Găsim:

$$b(1,n+1) = n+1, \quad b(k+1,n+1)= a_m(k,n); \quad 1 \le k \le n;$$

şi este uşor de văzut că:

$$b(k+1,n+1) - b = a_m(k+1,n+1) \quad (\bmod\ n+1)$$

şi cu aceasta, relația (1) este demonstrată. Dacă facem notația $a_m(0,n)=0$, atunci numerele $a_m(k,n)$ ($1 \le k \le n$) sunt complet determinate folosind relația (1).

Plecând de la problema lui Josephus se poate formula o a 2-a problemă astfel: Fie *n* şi *l* fixate ($1 \le l \le n$). Notăm *A(0,n)=l* şi presupunem că A(i,n-i) este definit pentru un i ($0 \le i < n$). Dacă A(i,n-i)>0, atunci determinăm termenul A(i+1,n-i-1) cu ajutorul condițiilor:

$$A(i+1,n-i-1) \equiv A(i,n-i)-m \quad (\bmod\ n-i)$$

şi

$$0 \le A(i+1,n-i-1) < n-i .$$

Dacă A(i+1,n-i-1) = 0 atunci *k = i*+1 şi $a_m(k,n)=l$, ca o consecință a lui (1). Repetând acest procedeu, dacă A(i+1,n-i-1) > 0 în final găsim o valoare unică pt. *k* ( $1 \le k \le n$ ) pentru care $a_m(k,n)=l$.

Exemplu: Pentru m=10, n=30, *l*=14 găsim k=15:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| n-i: | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 |
| A(i,n-i): | 14 | 4 | 23 | 13 | 3 | 19 | 9 | 23 | 13 | 3 | 14 | 4 | 13 | 3 | 10 | 0. |

## Formulele lui Schubert şi Busche

Fie din nou un număr *m* întreg fixat, $m \ge 2$. Construim secvența de numere întregi pozitive numită şi secvență modulară de întregi

$$N_i = N_i(m,t)$$

( i = 1,2,…) definită iterativ:

$$N_1 > 0, \quad N_{i+1} = \left\lceil \frac{m(N_i + t)}{m-1} \right\rceil \quad (i \ge 1),$$

unde *t* este un întreg nenegativ fixat,iar notațiile $\lceil x \rceil$ şi $\lfloor x \rfloor$ reprezintă cel mai mic întreg $\ge x$, respectiv cel mai mare întreg $\le x$.

Se observă că $N_{i+1} > N_i$ *pentru* $i \ge 1$. De asemenea avem : $N_i \ne 1 (\bmod \quad m)$, pentru toți $i > 1$.

*Secvența Schubert este*:

$$N_i = N_i(m,0) \quad (i=1,2,...), \text{ cu } \quad N_1 = m(n-k)+1$$

şi *secventa Busche este*:

$$N_i^{'} = N_i(m,n-k) \quad (i=1,2,...), \text{ cu } \quad N_1^{'} = 1.$$

Se demonstrază uşor, prin inducție după *i* că :

$$N_i - N_i^{'} = m(n-k), \text{ pentru oricare } i \ge 1.$$

Observăm de asemenea că pentru *k=n* cele două secvențe coincid una cu cealaltă. De asemenea, pentru *m*=2 avem :

(3) $$N_i = (n-k)2^i + 2^{i+1} \quad (i \ge 1),$$

a) Formula lui Schubert: Fie $N_i \quad (i=1,2,...)$ o secvență Schubert. Pentru *m, n ,k* date, dacă :

$$N_i < mn+1 < N_{i+1},$$

sau echivalent, dacă $N_{i-1} \le (m-1)n < N_i$, ( unde $N_0 = 0$), avem:

$$a_m(k,n) = mn+1-N_i .$$

b) Formula lui Busche: Fie $N'_i \quad (i=1,2,...)$ o secvență Busche. Pentru *m, n ,k* date, dacă:

$$N'_i < nk+1 < N'_{i+1}, \text{ avem: } a_m(k,n) = mk+1-N'_i .$$

Obs.: Cele două formule coincid pentru k=n. De asemenea, formula lui Rankin (2) pentru calculul lui $d_2(n)$ se obține ca un caz particular pentru m=2 , k=n şi $N_i = (n-k)2^i + 2^{i+1} \quad (i \ge 1)$.

Exemplu: Pentru m=10, n=30, k=15 avem: mn+1=301, mk+1 = 151 şi:

| i: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_i$: | 151 | 168 | 187 | 208 | 232 | 258 | 287 | 319 |
| $N'_i$: | 1 | 18 | 37 | 58 | 82 | 108 | 137 | 169 |

Avem: $a_{10}(15,30) = 301-287 = 151-137 = 14.$

**Algoritmul lui Uchiyama**.

Se bazează pe 3 secvențe de numere întregti strict pozitive: $n_i, c_i, c_i^*$ (i=1,2,…) care satisfac condițiile:

$$n_1 > 0, \quad 0 < c_1 = c_1^* \le n_1 + 1,$$

apoi, prin recurență se determină, pentru i ≥1:

(4) $$n_{i+1} = \left\lfloor \frac{m(n_i+1)-c_i}{m-1} \right\rfloor$$

(5) $$c_{i+1}^* = c_i + (m-1)(n_{i+1}+1) - m(n_i+1),$$

(6) $$c_{i+1} \equiv c_{i+1}^* \pmod{n_{i+1}+1}, \quad 0 < c_{i+1} \le n_{i+1}+1.$$

Obsrevații: Din (4) şi (5) rezultă că $0 < c_i^* \le m-1;$ de asemenea, din (6) observăm că

$$c_i = c_i^*$$

pentru toate valorile lui *i* pentru care

$$n_i + 1 \ge m-1, \text{ (sau, echivalent, } n_i \ge m-2\text{)},$$

în afară de cazul *i* =1.

Pentru cazul particular m=2 avem pentru

$$n_1 = c_1 = 1,$$

$$n_i = 2^i - 1, \quad c_i = 1 \quad \text{pentru toți } i \ge 1.$$

De asemenea, pentru m≥2 şi $n_1 = 1$ ( iar din definiție $c_1 = 1,$ sau $c_1 = 2$) avem :

$$n_i = i, \text{ pentru } 1 \le i < m,$$

şi

$$n_m = m$$

cu condiția ca

$$c_{m-1} > 1 .$$

Cu aceste observații se poate construi formula pentru determinarea numerelor $a_m(k,n)$ (1≤k≤n):

Construim mai întâi secvențele:

$$\begin{cases} n_1 = n-k, \quad c_1 = a_m(1, n_1+1) \quad daca \quad 1 \le k < n, \\ n_1 = 1, \quad c_1 = a_m(2,2) \quad daca \quad k = n, \end{cases}$$

la care se adaugă relațiile (4), (5) şi (6). In aceste condiții avem (Formula lui Uchiyama) :

(7) $$a_m(k,n) = c_i + m(n - n_i - 1)\,, \quad \text{dacă} \quad n_i < n \le n_{i+1}\,.$$

Notăm cu $a_m(1, n_1 + 1) \equiv m \pmod{n_1 + 1}$

şi

$$a_m(2,2) = d_m(2) = 1 \qquad or \quad 2,$$

după cum *m* este par sau impar.

Se pot stabili legaturi între secvențele astfel construite:

<u>*Lema 1*</u>: Pt. fiecare *i≥1* corespunde un unic j=j(i) ≥1 astfel încât:

(8) $$m(n_i + 1) + 1 - c_i = N_j.$$

Invers, dacă egalitatea (8) este adevărată, atunci un intreg *n* satisface inegalitatea

$$n_i < n \le n_{i+1}$$

dacă şi numai dacă

$$N_j < mn + 1 < N_{j+1}\,.$$

In plus, întotdeauna avem: j(i+1)>j(i) şi j(i+1)=j(i)+1, dacă $c_{i+1} = c^*_{i+1}$ sau dacă $n_i \ge m - 3$.

<u>Exemplu</u>: Pentru m=10, n=30, k=15, avem

$$n_1 = 15, \quad c_1 = a_{10}(1,16) = 10 \text{ şi:}$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $n_i$ : | 15 | 16 | 18 | 20 | 23 | 25 | 28 | 31 |
| $c_i$ : | 10 | 3 | 4 | 3 | 9 | 3 | 4 | 2 |

Deci: $a_{10}(15,30) = 4 + 10(30 - 28 - 1) = 14.$

<u>Obs.:</u> Pe baza lemei se poate demonstra că acest algoritm are o viteză mai bună decât algoritmii lui Schubert sau Busche.

<u>**Caz particular**</u>

Pentru *k*=*n* trebuie să determinăm ultimul număr care va fi eliminat,

$$d_m(n) = a_m(n,n)\,, \text{ unde } m \ge 2.$$

Deoarece $d_m(1) = 1$ pentru oricare *m*, vom presupune în continuare că *n*>1.

Incepem cu cazul $n_1 = 1$ şi $c_1 = d_m(2)$ ( adică $c_1$ este fie 1 fie 2 după cum *m* este par sau impar) .

In acest caz, folosind relațiile (4),(5),(6) se construiesc secvențele $n_i$, $c_i$ ( bineînțeles şi $c^*_i$), i=1,2,…

Pentru *k* = *n* şi dacă $n_i < n \le n_{i+1}$, formula (7) devine:

(9) $$d_m(n) = c_i + m(n - n_i - 1).$$

Dacă *m* = 2 şi $n_1 = c_1 = 1$ se demonstrează că $n_i = 2^i - 1$ şi $c_i$ =1 pentru toți i>1.

Deoarece inegalitatea $n_i < n \le n_{i+1}$ este echivalentă cu $2^i \le n < 2^{i+1}$ se obține din nou formula (2).

De asemenea pentru *m* ≥ 2, construcția noastră arată că $n_i = i$ pentru $1 \le i < m$. Si de aceea $c_i = d_m(i+1)$ pentru aceste valori ale lui *i*.

Deoarece din $d_m(m) \ge 2$ şi $m \ge 3$ se obține $n_m = m$ şi $c_{m-1} = d_m(m)$.

Aşadar, dacă $m \ge 3$ şi se cunoaşte valoarea $d_m(m)$ se pot construi secvențele $n_i$ şi $c_i$ plecând de la $n_1 = m$ şi $c_1 = d_m(m+1) = d_m(m) - 1,$ în cazul in care n > m ≥ 3.

Este interesantă şi formula:

$$d_3(n) = 3n + 1 - \left\lfloor C\left(\frac{3}{2}\right)^D \right\rfloor,$$

unde, C = 1.62227 05028 84767 31595 69509 82899 32899 32411…,

iar $\quad D = D(n) = \left\lceil \log_{3/2}((2n+1)/C) \right\rceil$.

**Exemple:**

Mai întâi vom afişa primele 60 valori pentru $d_m(m)$ (1≤*m*≤60) din care vom folosi în exemplele care urmează:

| $m$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_m(m)$: | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 4 | 5 | 4 | 8 | 8 | 7 | 11 | 8 | 13 | 4 | 11 | 12 | 8 | 12 | 2 | 13 | 7 | 22 | 2 | 8 | 13 | 26 | 4 | 26 | 29 |

| $m$: | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_m(m)$: | 17 | 27 | 26 | 7 | 33 | 20 | 16 | 22 | 29 | 4 | 13 | 22 | 25 | 14 | 22 | 37 | 18 | 46 | 42 | 46 | 9 | 41 | 12 | 7 | 26 | 42 | 24 |

| $m$: | 58 | 59 | 60 |
|---|---|---|---|
| $d_m(m)$: | 5 | 44 | 53. |

1) Să se calculeze $d_3(41)$. Avem *m=3, n=41*; cunoaştem $d_3(3)$=2 şi deci $n_1 = 3$ şi $c_1 = 1$:

| i: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$: | 3 | 5 | 8 | 13 | 20 | 30 | 46 | 69 |
| $c_i$: | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |

Deci, $d_3(41)$=1+3(41-30-1)=31.

2) Să se calculeze $d_3(53)$. Avem *m=3, n=53*. Folosind tabelul de la ex. anterior găsim:

$$d_3(53)=2+3(53-46-1)=20.$$

3) Să se calculeze $d_6(117)$. Avem: *m=6, n=117*, $d_6(6) = 4$; $n_1 = 6$ şi $c_1 = 3$.

| i: | 1 | 2 | 3 | … | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$: | 6 | 7 | 9 | … | 88 | 106 | 127 |
| $c_i$: | 3 | 1 | 3 | … | 2 | 3 | 1 |

Deci $d_6(117)$=3+6(117-106-1)=63.

4) Să se calculeze $a_6(46,117)$. Avem *m=6, n=117, k=46;* $n_1 = 71$ şi $c_1 = a_6(1,72) = 6$.

| i: | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$: | 71 | 85 | 102 | 123 |
| $c_i$: | 6 | 4 | 3 | 5 |

Deci $a_6(46,117)$=3+6(117-102-1)=87.

5) Să se calculeze $a_6(66,117)$. Avem *m=6, n=117, k=66*; $n_1 = 51$ şi $c_1 = a_6(1,52) = 6$.

| i: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$: | 51 | 61 | 73 | 88 | 106 | 127 |
| $c_i$: | 6 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 |

Deci $a_6(66,117)$=4+6(117-106-1)=64.

6) Să se calculeze $a_6(116,117)$. *Avem m=6, n=117, k=116*; $n_1 = 1$ şi $c_1 = a_6(1,2) = 2$.

| i: | 1 | 2 | 3 | … | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$: | 1 | 2 | 3 | … | 86 | 103 | 124 |
| $c_i$: | 2 | 2 | 4 | … | 4 | 2 | 3 |

Deci $a_6(116,117)$=2+6(117-103-1)=80.

7) Să se calculeze $a_9(10,11)$. Avem *m=9, n=11, k=10*; $n_1=1$ şi $c_1=a_9(1,2)=1$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $n_i$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $c_i$: | 1 | 1 | 2 | 1 | 4 | 6 | 7 | 7 | 6 | 4 | 1 |

Deci $a_9(10,11)$=4.

8) Să se calculeze $a_9(9,11)$. Avem *m=9, n=11, k=9*; $n_1=2$ şi $c_1=a_9(1,3)=3$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $n_i$: | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| $c_i$: | 3 | 4 | 3 | 6 | 1 | 2 | 2 | 1 | 7 |

Deci $a_9(9,11)$=1+9(11-9-1)=10.

9) Calculați $a_7(k,R_{23})$, unde *m=7, n=* $R_{23}$, *k= n - 2001.* $R_{23}$=11111111111111111111111 şi este numit *unitate reprezentativă primă cu 23 cifre zecimale*. Avem $n_1=2001$ şi $c_1=a_7(1,2002)=7$. In final se determină $n_{280}<n<n_{281}$ şi $c_{280}=5$, unde $n_{280}=9538759184899654873314$. Deci:

$$a_7(k,n)=5+7(n-n_{280}-1)=1100646348348019366457 7.$$

10) Să se calculeze $d_m(n)$, pentru m=7, n= $R_{23}$. Avem: $n_1=7$ şi $c_1=4$. Găsim: $n_{316}<n<n_{317}$ şi $c_{316}=2$, unde $n_{316}$ =9711936891836718664167, aşadar:

$$d_7(n)=2+7(n-n_{316}-1)=9794219534920747128603.$$

**<u>Problemă:</u>** In condițiile problemei lui Josephus să se determine $d_2(n)$, dacă *n* are cel mult 100 cifre.

| | |
|---|---|
| 10 | 5 |
| 100 | 73 |
| 128 | 1 |
| 75536 | 20001 |
| 2147483648 | 1 |
| 12345678901234567890 | 6244613728759584165 |
| 8697105114117115 | 8387010973493239 |
| 99887766554433221100 | 52201580519190029273 |
| 7928274675340322210743486 | 6185142793763611023837565 |
| 11111111111111111111111 | 3332756290743641367439 |

1. S. Uchiyama - O generalizare o problemei lui Josephus - Tsukuba J. Math. 2003.