Introducere

Rationamentul inductiv are la bază construirea termenilor unui şir de obiecte în functie de termenii anteriori (deja determinați). Principiul inducției matematice este un mod de raționament prin care se asigură faptul că obiectele din şir sunt generate corect indiferent de poziția termenului.

Exemple

1. **Şirul lui Fibonacci**

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Pentru acest şir se poate dermina o formulă prin care se poate calcula orice termen (formulă care se demonstrează prin inducție matematică)

2. **Calculul unor sume folosind sume calculate anterior**

$S_k=x_1+\ldots+x_k$, conduce la $S_k=S_{k-1}+x_k$.

- **Dacă $x_k=k$, pentru orice k număr natural nenul, obținem formula $S_n=n(n+1)/2$.**
- **Dacă $x_k=k^2$, pentru orice k număr natural nenul, obținem formula $S_n=n(n+1)(2n+1)/6$.**
- **Dacă $x_k=k^3$, pentru orice k număr natural nenul, obținem formula $S_n=n^2(n+1)^2/4$.**

Toate aceste formule putând fi demonstrate prin inducție matematică, în acest fel avem certitudinea că ele sunt adevărate prntru orice număr natural nenul n.

Inducția matematică pleacă de la câtiva termini dați (de obicei primii) sau construiti prin diverse metode (backtracking, manual, etc) şi verifică posibilitatea de a trece de la unul sau mai mulți termini generați anterior la cel curent.

Notiuni introductive. Principiul inducției matematice.

Inducția completă are un domeniu restrâns de aplicabilitate în matematică. De regulă, propozițiile matematice se referă la o mulțime infinită de elemente (de exemplu, mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor prime, mulțimea poliedrelor ş.a.m.d.) şi nu este posibil de considerat, pe rând, toate aceste elemente. Există însă o metodă de a raționa, care înlocuieşte analiza, de altfel imposibil de realizat în practică, a unei mulțimi finite de cazuri cu demonstrarea faptului că, dacă o propoziție este adevărată într-un caz, atunci ea se dovedeşte a fi adevărată şi în cazul care succede acestuia. O astfel de metodă de raționament se numeşte *inducție matematică*.

Să luăm o problemă foarte simplă: *Pentru orice număr natural nenul n are loc egalitatea:*

$$1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2 \qquad (1)$$

Să notăm cu P(n) egalitatea (1) (care este o propoziție), pentru orice număr natural nenul n. Atunci, faptul că P(1), P(2), P(3), P(4), P(5) sunt adevărate (se verifică direct foate uşor), înseamnă că egalitatea (1) are loc respectiv pentru n=1, n=2, n=3, n=4, n=5.

Să demonstrăm că pentru orice număr natural nenul oarecare k, avem că P(k) implică P(k+1).

Aceasta înseamnă că din egalitatea $1+2+\ldots+k=k(k+1)/2$ să rezulte egalitatea $1+2+\ldots+k+(k+1)= (k+1)(k+2)/2$.

Într-adevăr,

$1+2+\ldots+k+(k+1)= (1+2+\ldots+k)+(k+1)= k(k+1)/2 + (k+1)=(k+1)(k+2)/2$.

Astfel, propoziția P(n) este adevărată pentru n=1, iar faptul că ea este adevărată pentru n=k, rezultă că ea este adevărată şi pentru n=k+1.

Atunci P(1) implică P(2), deoarece 2=1+1; P(2) implică P(3), deoarece 3=2+1; P(3) implică P(4), deoarece 4=3+1; ş.a.m.d.

Pare natural că în modul acesta se poate ajunge până la orice număr n, adică P(n) este adevărată pentru orice număr natural nenul n; deci raționamentul făcut pare convingător. Acest raționament este riguros din punct de vedere matematic, deoarece este un caz particular al unui principiu de bază al matematicii, numit *principiul inducției matematice.*

Acesta se formulează astfel:

Dacă o propoziție P(n), n fiind un număr natural, este eadevărată pentru n=0, şi, din aceea că ea este adevărată pentru n=k (unde k este un număr natural oarecare) rezultă că ea este adevărată şi pentru numărul natural n=k+1, atunci propoziția P(n) este adevărată pentru orice număr natural n.

În modul de construcție a mulțimii numerelor naturale (introdus de G. Peano), principiul inducției matematice este una dintre axiomele de bază. Acest principiu ne dă metoda de demonstrație numită *metoda inducției matematice*.

Fie P(n) o propoziție care depinde de un număr natural $n \geq m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin metoda inducției matematice a propoziției P(n), constă din două etape:

1. *Se verifică mai întâi că P(m) este adevărată.*
2. *Se presupune că P(k) este adevărată şi se demonstrează că P(k+1) este adevărată, k fiind un număr natural mai mare sau egal cu m.*

Dacă ambele etape ale demonstrației sunt verificate, atunci propoziția este adevărată pentru orice număr natural $n \geq m$.

Observație

În metoda anterioară se face trecerea de la P(k) la P(k+1), adică se foloseşte pasul 1. Principiul inducției matematice merge folosit şi cu alt pas h (număr natural nenul fixat). Această variantă are forma:

Fie P(n) o propoziție care depinde de un număr natural $n \geq m$ *, m fiind un număr natural fixat.*

Demonstrația prin metoda inducției matematice cu pasul h (număr natural nenul fixat) a propoziției P(n), constă din etapele:

1. *Se verifică mai întâi că P(m), P(m+1),…P(m+h-1) sunt adevărate.*
2. *Se presupune că P(k) este adevărată şi se demonstrează că P(k+h) este adevărată, k fiind un număr natural mai mare sau egal cu m.*

O altă variantă a *principiului inducție matematice este următoarea:.*

Fie P(n) o propoziție care depiinde de un număr natural $n \geq m$ *, m fiind un număr natural fixat.*

Demonstrația prin această variantă a metodei inducției matematice a propoziției P(n) constă din:

1. *Se verifică mai întâi că P(m) este adevărată.*
2. *Se presupune că P(l) este adevărată pentru orice l, unde* $m \leq l < k$ *, şi se demonstreză că P(k) este adevărată.*

Dacă ambele etape ale demonstrației sunt verificate, atunci propoziția P(n) este adevărată pentru orice număr natural $n \geq m$.

Aplicații

1. Să se demonstreze că orice număr natural $n \geq 2$*, ori este număr prim, ori se descompune în produsul unui număr finit de numere prime.*

Demonstrație

Folosim metoda inducției matematice (varianta anterior prezentată). Notăm cu P(*n*) propoziția: “Numărul $n \geq 2$, ori este prim, ori este produs de numere prime”.

1. P(2) este adevărată, deoarece *n*=2 este număr prim.
2. Să presupunem că P(*l*) este adevărată pentru orice *l*, $2 \leq l < k$, şi să demonstrăm că

P(*k*) este adevărată. Într-adevăr, fie numărul natural *k*. Dacă *k* este un număr prim rezultă că P(*k*) este adevărată. Dacă *k* nu este număr prim, atunci *k=ab*, unde $2 \leq a, b < k$. După presupunerea noastră P(*a*), P(*b*) sunt adevărate, adică *a* şi *b* ori sunt prime, ori se descompun în produse de numere prime. Atunci este clar că şi *k=ab* se descompune în produs de numere prime, adică P(*k*) este adevărată. Conform metodei inducției matematice rezultă că P(*n*) este adevărată pentru orice număr natural $n \geq 2$.

Algoritmul care realizează descompunerea unui număr natural nenul este urmatorul:

```
Algoritm descompunere_in_factori_primi
var i,k,n,m:integer
    sw:boolean
begin
read(n)
k:=1
m:=n
if n=1 then
  write('Descompunerea in factori primi este ',n);
  oprire algoritm
endif
writeln('Descompunerea in factori primi este ')
sw:=true
while m<>1 do
 k:=k+1
 i:=0
 while m mod k=0 do
```

```
   m:=m div k
   i:=i+1
 endw
 if i>0 then
  if sw then
    write(n,'=',k,'^',i)
    sw:=false
        else
   write('*',k,'^',i)
  endif
 endif
endw
end
```

2. Se dau n (n≥1) perechi de numere întregi (a_1, b_1), (a_2,b_2), …, (a_n, b_n). Sã se determine douã numere întregi c şi d cu proprietatea:
$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2+ b_2^2) \ldots (a_n^2+ b_n^2) = c^2 + d^2$.

Exemplu

Pentru `n=3` şi perechile:

```
2 3
1 3
2 2
```

se va afişa:

```
c=28
d=16
```

Soluție

Existența şi construcția numerelor c şi d se poate realiza prin inducție matematicã cu pasul 1.
Dacã n=1 atunci putem lua c=a_1 şi d=b_1.
Dacã $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2+ b_2^2) \ldots (a_k^2+ b_k^2) = e^2 + f^2$, atunci putem lua $c = ea_{k+1}+ fb_{k+1}$ şi $d= eb_{k+1} - fa_{k+1}$ pentru a obține $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2+ b_2^2) \ldots (a_k^2+ b_k^2)(a_{k+1}^2+ b_{k+1}^2) = c^2 + d^2$.
Algoritmul bazat pe modalitatea de construire a lui c şi d, prezentatã anterior este următorul:

```
Algoritm aplicatia2
var a,b:array[1..500] of integer;
    c,d,c1,d1,n,i:integer;
begin
read(n);
for i:=1 to n do
  write('Dati perechea ',i,' cu spatiu intre numere ')
  read(a[i],b[i])
endfor
c:=a[1];d:=b[1]
for i:=2 to n do
  c1:=c*a[i]+d*b[i]
  d1:=abs(c*b[i]-d*a[i])
  c:=c1
  d:=d1
endfor
write('c=',c)
write('d=',d);
end
```

Probleme propuse

1. ***Problema patrat****. Pentru n număr natural, n≥6 să se împartă un pătrat în n pătrățele.*

Exemplu

Pentru valoarea lui n egală cu:

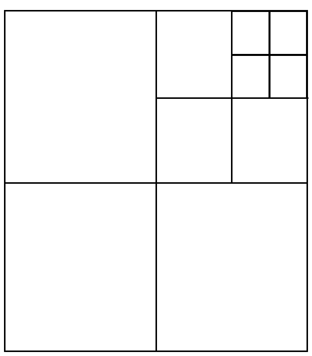
```
10
9
```

o soluție posibilă este:

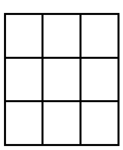
```
1  1  1  1  4  4  7  8
1  1  1  1  4  4  10 9
1  1  1  1  5  5  6  6
1  1  1  1  5  5  6  6
2  2  2  2  3  3  3  3
2  2  2  2  3  3  3  3
2  2  2  2  3  3  3  3
2  2  2  2  3  3  3  3

1 2 3
4 5 6
7 8 9
```

Primul tablou corespunde partiției:



Al doilea tablou corespunde partiției:



Observăm mai întâi că datorită principiului inducției matematice problema are soluție pentru orice n≥6. Pasul inducției este 3.

Astfel problema poate fi rezolvată construind succesiv un şir de tablouri.

Primele 3 descompuneri sunt:

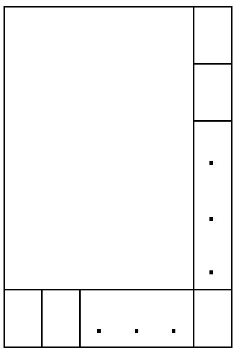
Pentru. n=6,

```
1 2 3
6 6 4
6 6 5
```

Pentru. n=7,

```
1 1 4 5
1 1 7 6
2 2 3 3
```

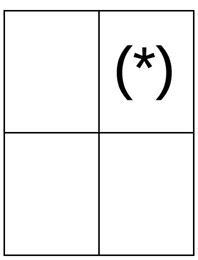
2 2 3 3
Pentru n=8,
1 2 3 4
8 8 8 5
8 8 8 6
8 8 8 7
Algoritmul pe care îl prezentăm mai jos se bazează pe situațiile:
- dacă n este par atunci pătratul va fi descompus astfel:



(n/2)-1 pătrățele

(n/2)-1 pătrățele

-dacă n este impar atunci pătratul va fi descompus astfel:



iar pătratul (*) se descompune în n-3 pătrățele cu metoda de mai sus, pentru că n-3 este par.

*2.**Problema semne.** Pentru n numar natural, să se găsească o combinație de semne + şi - (adică un şir x=(x_1,x_2,...,x_k), x_i se afla în {-1,1}) şi un numar k natural nenul astfel încât:*
$n=x_1*1^2+x_2*2^2+...+x_k*k^2$.

Exemplu

Pentru valorile lui n egale cu:
2
4
8
5
o soluție posibilă este:
\- - - +
\- - +
\- - + + - - +
\+ + - - +

Indicație

Problema sub forma algebrică (P.Erdos şi M. Suranyi) se rezolvă construind iterativ combinații de semne pentru numerele consecutive de la 0 la numărul n. Astfel avem o soluție prin inducție matematică cu pasul 4, primii 4 termeni fiind:
$0=1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2$

$1=1^2$
$2=-1^2-2^2-3^2+4^2$
$3=-1^2+2^2$,
celelalte combinații se construiesc inductiv cu pasul 4, folosind relația:
$4=(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2$. Astfel, dacă pentru k avem scrierea $x_1*1^2+x_2*2^2+...+x_h*h^2$, atunci pentru k+4 avem $x_1*1^2+x_2*2^2+...+x_h*h^2+(h+1)^2-(h+2)^2-(h+3)^2+(h+4)^2$. Putem lua astfel $x_{h+1}=1$, $x_{h+2}=-1$, $x_{h+3}=-1$, $x_{h+4}=1$.

3. Se dã un numãr natural par m. Se cere sã se determine douã numere naturale x și y, astfel încât $m=(x+y)^2+3x+y$.
Exemplu
Pentru `m=6` se va afişa:
```
x=0
y=2
```

Indicație
Determinarea numerelor x şi y o vom face prin inducție matematicã cu pasul 1, notându-le cu x_n şi y_n unde m=2n .
Dacã m=0, putem lua $x_0=y_0=0$. Dacã afirmația este adevãratã pentru n numãr natural, atunci avem:
$2n=(x_n+y_n)^2+3x_n+y_n$.
Pentru a gãsi x_{n+1} şi y_{n+1} (deci a face trecerea de la n la n+1) cu $2n+2=(x_{n+1}+y_{n+1})^2+3x_{n+1}+y_{n+1}$ (*), distingem cazurile:
I. $y_n=0$, atunci putem lua $x_{n+1}=0$; $y_{n+1}=x_n+1$ şi (*) este verificatã.
II. $y_n\geq1$, atunci, pentru $x_{n+1}=x_n+1$ şi $y_{n+1}=y_n-1$, obținem (*).

4. Pentru n numãr natural, $n\geq6$. Sã se determine o soluție în mulțimea numerelor naturale a ecuației:
$1/x_1^2 + 1/x_2^2 + . . . + 1/x_n^2 =1$.
Exemplu
Pentru `n=7` o soluție este:
```
2 2 2 4 4 4 4
```

Indicație
Soluția problemei problemei poate fi construitã folosind metoda inducției matematice cu pasul 3, astfel:
- pentru n=6, avem: $1/ 2^2 + 1/ 2^2 +1/ 2^2 +1/ 3^2 +1/ 3^2 +1/ 6^2 = 1$;
- pentru n=7, avem: $1/ 2^2 + 1/ 2^2 +1/ 2^2 +1/ 4^2 +1/ 4^2 +1/ 4^2 +1/ 4^2 = 1$;
- pentru n=8, avem: $1/ 2^2 + 1/ 2^2 +1/ 2^2 +1/ 3^2 +1/ 3^2 +1/ 7^2 +1/ 14^2 + 1/21^2 = 1$;

Dacã pentru n avem:
$1/x_1^2 + 1/x_2^2 + . . . + 1/x_n^2 =1$, atunci pentru n+3, avem:
$1/x_1^2 + 1/x_2^2 + . . . + 1/x_{n-1}^2 + 1/(4x_n^2) +1/(4x_n^2) +1/(4x_n^2) +1/(4x_n^2) =1$, şi deci soluția este
$(x_1, x_2, \dots , x_{n-1}, 2x_n,2x_n,2x_n,2x_n)$.

5. Se dă un număr natural k. Se cere să se determine un număr natural n şi un şir $x=(x_1,x_2, ... ,x_n)$, x_i din mulțimea {-1,1}, $i\in\{1,2,...,n\}$, astfel încât $k=x_1*1^3+x_2*2^3+...+x_n*n^3$.
Exemplu
Pentru k=30
Semnele din fața cuburilor sunt
```
+ - - +
```

Indicație
Se foloseşte relația $(m+1)^3 - (m+2)^3 - (m+3)^3 + (m+4)^3 -(m+5)^3 +(m+6)^3 +(m+7)^3 - (m+8)^3 = -48$, pentru orice m număr natural. Astfel problema poate fi rezolvată prin inducție matematică cu pasul 48. Pentru a găsi descompunerile primilor 48 de numere se foloseşte metoda backtracking.

6. Pentru n este un număr natural nenul se cere să se determine numărul divizorilor pozitivi ai lui n.
Exemplu
Pentru `n=12` se va afişa numărul `6`.

Indicație

Pentru rezolvarea problemei folosim scrierea $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere naturale prime şi distincte două câte două, iar $a_1, a_2, \dots, a_k$ sunt numere naturale nenule. Prin inducție matematică vom demonstra că numărul divizorilor pozitivi ai lui n este egal cu $No(n) = (1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_k)$.

Fie P(k) propoziția "Dacă un număr natural n are k factori primi şi $a_1, a_2, \dots, a_k$ sunt exponenții acestora în descompunerea lui n, atunci numărul divizorilor pozitivi ai lui n este egal cu No(n)"

Pentru k=1, $n = p_1^{a_1}$, divizorii lui n sunt: 1, $p_1, p_1^2, \dots, p_1^{a_1}$, care sunt în număr de $1 + a_1$, deci P(1) este adevărată.

Fie $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{k+1}^{a_{k+1}}$. Numărul $n_1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ are $No(n_1) = (1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_k)$ divizori, iar numărul $n_2 = p_{k+1}^{a_{k+1}}$ are $1 + a_{k+1}$ divizori.

Cum $n = n_1 n_2$, orice divizor al lui n este produsul a doi divizori ai lui n_1 şi respectiv n_2. Aşadar $No(n) = No(n_1)No(n_2) = (1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_k)(1 + a_{k+1})$ şi deci P(k+1) este adevărată. Rezultă P(k) este adevărată pentru orice k număr natural nenul.

7. Se dă un număr natural nenul n. Se cere să se determine pentru numărul $2^{2^n} - 1$, n factori primi distincți.

Exemplu

Pentru `n=3` se va afişa `3, 5, 17`.

Soluție

Soluția se bazează pe metoda inducției matematice cu pasul 1. Pentru n=1, $2^{2^1} - 1 = 3$ are pe 3 ca factor prim.

Presupunem că $2^{2^n} - 1 = q_1 q_2 \dots q_n a$, unde a este număr natural nenul şi $q_1, q_2, \dots, q_n$ sunt numere prime distincte.

$$2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n})^2 - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = q_1 q_2 \dots q_n a(2^{2^n} + 1).$$

Cum $2^{2^n} - 1$ şi $2^{2^n} + 1$ sunt prime între ele, rezultă că $2^{2^n} + 1$ are un factor prim q_{n+1} diferit de $q_1, q_2, \dots, q_n$. Deci

$$2^{2^{2+1}} - 1 = q_1 q_2 \dots q_{n+1} b, \quad b \in N^*.$$

*8. Se dă un poligon convex cu **n** vârfuri (4≤n≤50) prin coordonatele vârfurilor (numere întregi din intervalul [-2000,2000]) date în sensul acelor de ceasornic.*

a) Să se verifice dacă poligonul are centru de simetrie. Punctul S este centru de simetrie dacã simetricul oricãrui punct de pe poligon față de S aparține poligonului.

b) Să se împartă poligonul (dacă are centru de simetrie) în paralelograme.

(Olimpiada Națională de Informatică, Mediaş, 1999)

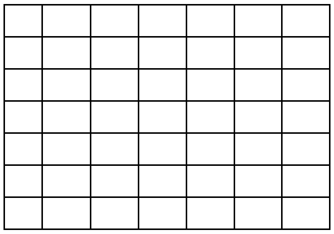
Indicație

a) Se observã cã numãrul vârfurilor unui poligon cu centru de simetrie este par. Verificarea existenței punctului de simetrie se reduce la a arãta cã laturile opuse două câte două sunt paralele şi congruente.

b) Determinarea descompunerii se poate face prin inducție matematicã cu pasul 2 astfel:

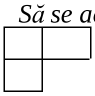
- dacã n este 4 atunci poligonul este chiar un paralelogram;
- pentru un poligon $A_1A_2\dots A_n$ alegem douã laturi opuse paralele, spre exemplu A_1A_2 şi $A_{n/2+2}A_{n/2+1}$ şi translatãm spre stânga pe direcția A_1A_2 cu lungimea A_1A_2 linia poligonalã $A_{n/2+2}A_{n/2+3}\dots A_nA_1$ obținând n/2 –1 paralelograme şi un poligon convex cu n-2 vârfuri, care moşteneşte proprietatea de a avea centru de simetrie. Astfel problema a fost redusã la împãrțirea unui poligon cu n-2 vârfuri.

9. Un pătrat este împărțit prin drepte orizontale şi verticale în $(6N+1)^2$ pătrăţele egale. Spre exemplu pentru N=1 se obține:



Cerință

Să se acopere pătratul inițial, cu piese de forma:



astfel încât:

- *să nu existe suprapuneri ale acestor piese;*
- *să rămână neacoperit pătrățelul de pe linia P şi coloana Q.*

Fişier de intrare PATRAT.IN are structura:

Linia 1: N

- număr natural având semnificația din enunț.

Linia 2: P Q

- două numere naturale separate printr-un spațiu, având semnificația din enunț.

Fişier de ieşire PATRAT.OUT are structura:

Liniile 1, 2, …, 6N+1

- pe fiecare din aceste linii se vor afla 6N+1 valori întregi pozitive, separate prin spații. Ele corespund unui tablou bidimensional cu 6N+1 linii şi 6N+1 coloane care descrie modul de acoperire a pătratului. Pentru fiecare piesă există trei numere egale (din mulțimea $\{1, 2, \dots, 12N^2+4N\}$) ce o reprezintă. Nu se pot codifica două piese cu aceleaşi numere. Pătrățelului de pe linia P şi coloana Q îi va fi asociat numărul 0.

Restricții

$1 \le N \le 20$

$1 \le P,Q \le 6N+1$

Exemplu

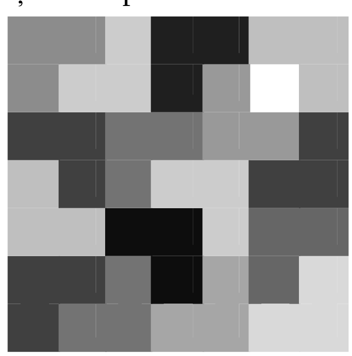
PATRAT.IN

```
1
2 6
```

PATRAT.OUT

```
1   1   2   3   3   5   5
1   2   2   3   4   0   5
6   6   8   8   4   4   10
7   6   8   9   9   10  10
7   7   12  12  9   16  16
13  13  14  12  15  16  11
13  14  14  15  15  11  11
```

Soluția corespunde

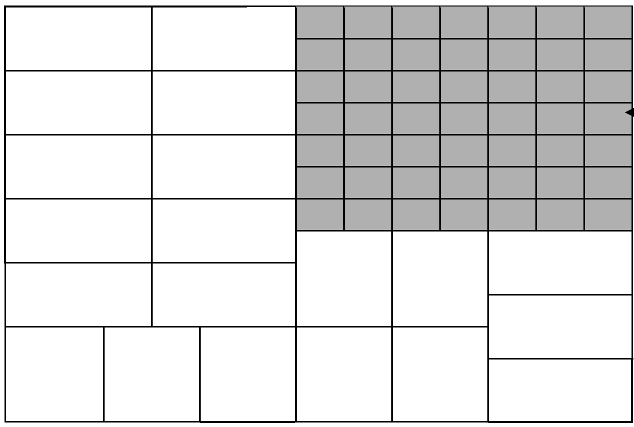


Observație: Ordinea de numerotare a pieselor nu este importantă.

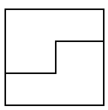
Indicație

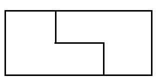
Rezolvarea problemei o vom face prin inducție matematică după n cu pasul 1.

Acoperirea pătratului format din $(6n+1)^2$ pătrațele se reduce la acoperirea unui pătrat format din $(6(n-1)+1)^2$ pătrațele, împărțind pătratul inițial ca în figura de mai jos (sau o alta figură ca cea de mai jos obținută prin rotire cu 90°, 180° sau 270°):



în funcție de poziția pătrățelului care lipseşte (adică acesta trebuie să fie în zona haşurată).
Fiecare dreptunghi de dimensiune 2*3 se poate acoperi folosind figuri ca cele din enunt în modul următor:





Se continuă procedeul până se ajunge la acoperirea unui pătrat format din 7*7 pătrățele care conțin patrățelul de coordonate (P,Q) ce nu trebuie acoperit de piese. Acoperirea acestuia se poate realiza folosind eventual metoda backtracking (într-un program separat) şi apoi declararea unor tablouri constante ce o codifică (care vor fi folosite şi rotite).

*10. Se dă un poligon convex cu **n** vârfuri (4≤n≤50) prin coordonatele vârfurilor (numere întregi din intervalul [-2000,2000]) date în sensul acelor de ceasornic.*

c) Să se verifice dacă poligonul are centru de simetrie. Punctul S este centru de simetrie dacã simetricul oricãrui punct de pe poligon față de S aparține poligonului.

d) Să se împartă poligonul (dacă are centru de simetrie) în paralelograme.

Datele de intrare se citesc din fişierul te tip text **POLIGON.IN** având structura:

n
x1 y1
x2 y2
…
xn yn

Datele de ieşire se vor scrie în fişierul text **POLIGON.OUT** având structura:

mesaj
px11 py11 px21 py21 px31 py31 px41 py41
px12 py12 px22 py22 px32 py32 px42 py42
…
px1k py1k px2k py2k px3k py3k px4k py4k

unde **mesaj** poate fi '**DA**' sau '**NU**', în funcție de existența sau nu a centrului de simetrie. Dacă mesajul este '**NU**', fişierul va conține doar prima linie, altfel va mai conține coordonatele vârfurilor (în sensul acelor de ceasornic) paralelogramelor, pe câte un rând fiecare.

Exemple

POLIGON.IN

```
8
20 30
30 30
40 20
40 10
30 0
```

```
20 0
10 10
10 20
```
POLIGON.OUT
```
DA
20 0 10 10 20 10 30 0
10 10 10 20 20 20 20 10
10 20 20 30 30 30 20 20
20 10 20 20 30 10 30 0
20 20 30 30 40 20 30 10
40 20 40 10 30 0 30 10
```

POLIGON.IN
```
4
10 20
40 30
40 10
20 10
```
POLIGON.OUT
```
NU
```
Restricție

Dacã douã paralelograme cu interioarele disjuncte au o laturã comunã şi alte douã laturi în prelungire se va afişa un singur paralelogram şi anume cel care le conține pe cele douã.

(Olimpiada Națională de Informaticã, Mediaş, 1999)

Indicație

a) Se observã cã numãrul vârfurilor unui poligon cu centru de simetrie este par. Verificarea existenței punctului de simetrie se reduce la a arãta cã laturile opuse douã câte douã sunt paralele şi congruente.

b) Determinarea descompunerii se poate face prin inducție matematicã cu pasul 2 astfel:

- dacã n este 4 atunci poligonul este chiar un paralelogram;

pentru un poligon $A_1A_2\ldots A_n$ alegem douã laturi opuse paralele, spre exemplu A_1A_2 şi $A_{n/2+2}A_{n/2+1}$ şi translatãm spre stânga pe direcția A_1A_2 cu lungimea A_1A_2 linia poligonalã $A_{n/2+2}A_{n/2+3}\ldots A_nA_1$ obținând n/2 –1 paralelograme şi un poligon convex cu n-2 vârfuri, care moşteneşte proprietatea de a avea centru de simetrie. Astfel problema