Emanuela Cerchez
Marinel Şerban
Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

Numere **Catalan,** numere **generalizate Catalan,** numere **Narayana**

Problema 1. Şiruri `k`-A `m`-B

Să se determine numărul şirurilor formate din `k` litere **A** şi `m` litere **B**, care au proprietatea:

(P) pentru orice `1≤i≤m+k`, numărul de litere **B** nu depăşeşte numărul de litere **A** în prefixul şirului de lungime `i`.

Soluție

Numărul acestor şiruri este nenul dacă şi numai dacă este îndeplinită condiția `m≤k`.
Numărul şirurilor care conțin litera **A** de `k` ori, iar litera **B** de `m` ori este

```
Nr(k,m)=(m+k)!/(m!k!)=Comb(m+k,m)
```

unde prin `Comb(m+k,m)` au fost notate numărul combinărilor de `m+k` elemente luate câte `m`.
Dintre aceste şiruri, vom determina numărul şirurilor care nu verifică proprietatea **(P)**.
Să considerăm **S** un şir care conține litera **A** de `k` ori, litera **B** de `m` ori şi care nu verifică proprietatea **(P)**. Există în acest şir o poziție `2p+1` (`p≥0`) astfel încât **S**[`2p+1`]**=B**, iar prefixul şirului **S** de lungime `2p` conține `p` litere **A** şi `p` litere **B**. Vom alege `p` minim cu această proprietate.

Transformăm şirul **S** după cum urmează:

- Adăugăm pe prima poziție o literă **A**. Se obține astfel un şir format din `m` litere **B** şi `k+1` litere **A**, iar prefixul de lungime `2p+2` al acestui şir conține un număr egal de litere **A** şi **B**.
- În prefixul de lungime `2p+2` al şirului obținut schimbăm litera **A** în litera **B**, iar litera **B** în litera **A**. Prin această transformare numărul total de litere **A** şi **B** nu se modifică, iar prima literă din şir este acum **B**.

Prin aceste transformări asociem în mod biunivoc unui şir care conține litera **A** de `k` ori, litera **B** de `m` ori şi care nu verifică proprietatea **(P)** un şir care conține litera **A** de `k+1` ori, litera **B** de `m` ori şi care începe cu litera **B**. Adică numărul şirurilor care conțin litera **A** de `k` ori, litera **B** de `m` ori şi care nu verifică proprietatea **(P)** este egal cu numărul şirurilor care conține litera **A** de `k+1` ori, litera **B** de `m` ori şi care începe cu litera **B** (`m<k+1`).
Suprimând prima literă din aceste şiruri, obținem toate şirurile formate din `m-1` litere **B** şi `k+1` litere **A**. Numărul lor este:

```
Nr(k+1,m-1)=Comb(m+k,m-1)
```

Deci numărul şirurilor care conțin litera **A** de `k` ori, litera **B** de `m` ori şi satisfac proprietatea (**P**) este

```
Comb(m+k,m)-Comb(m+k,m-1)=Comb(m+k,m)*(k-m+1)/(k+1)
```

Problema 2. Şiruri corect parantezate

Să se determine numărul şirurilor formate din `n` perechi de paranteze rotunde care se închid corect.

Soluție

Dacă în problema precedentă considerăm `k=m=n`, atunci obținem problema parantezelor (şirurile formate din `n` perechi de paranteze rotunde care se închid corect).

Deducem că numărul de soluții este

```
Comb(2n,n)/(n+1) = Catalan(n)
```

număr denumit şi numărul lui **Catalan** (de ordin `n`).

Observații

1. Datorită modului de obținere a numerelor Catalan, prezentat în soluția problemei precedente, deducem un mod de calcul al numerelor Catalan, bazat pe triunghiul combinărilor al lui Pascal. Astfel, `Catalan(n)` se obține din diferența dintre termenul `n` de pe linia `2n` a triunghiului lui Pascal şi termenul din stânga sa:

```
Catalan(n)=Comb(2n,n)-Comb(2n,n-1)
```

2. Din formula care descrie numerele Catalan, putem deduce şi o relație de recurență:

```
Catalan(0)=1 şi (n+2)Catalan(n+1)=(4n+2)Catalan(n),(n>0)
```

3. Numerele lui Catalan constituie un şir de numere naturale, primii termeni fiind:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, ...

4. În literatura de specialitate se utilizează notația $Catalan(n)=C_n$ pentru a indica numărul lui Catalan de ordin n, cu $C_0=1$.

O altă abordare recursivă

Să revenim la problema şirurilor corect parantezate.
Analizând problema pentru n=1 obținem o soluție (), iar pentru n=2 obținem două soluții ()() şi (()).
Observăm că orice şir format din n perechi de paranteze care se închid corect începe cu paranteză deschisă şi există o paranteză închisă care corespunde acestei paranteze deschise.
Deci şirul poate fi partiționat în două secvențe sub forma (X)Y, unde X este un şir de k perechi de paranteze care se închid corect, iar Y este un şir de n-k-1 perechi de paranteze care se închid corect ($0\le k<n$). Deducem astfel următoarea formulă de recurență:

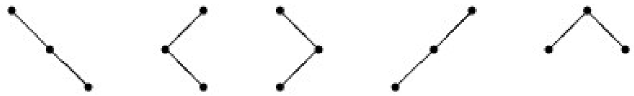
```
Catalan(n)= Catalan(0)*Catalan(n-1)+ Catalan(1)*Catalan(n-2)+
            Catalan(2)*Catalan(n-3)+...+ Catalan(n-1)*Catalan(0)
```

Exemple de interpretări ale numerelor Catalan

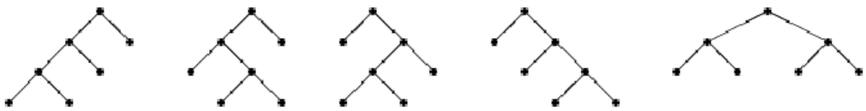
Numerele lui Catalan intervin în numeroase probleme de combinatorică. Amintim unele dintre cele mai cunoscute interpretări combinatorice ale numerelor lui Catalan.

1. Fie * o operație binară asociativă. În câte moduri poate fi parantezată expresia $a_1*a_2*...*a_n$? Soluția problemei a fost dată de matematicianul belgian Eugene Charles Catalan în 1838 şi este Catalan(n-1).
   De exemplu, pentru n=4 cele Catalan(3)=5 modalități de parantezare ale şirului $a_1*a_2*a_3*a_4$ sunt:
   $(a_1*a_2)*(a_3*a_4)$ $a_1*((a_2*a_3)*a_4))$ $(a_1*(a_2*a_3))*a_4$ $((a_1*a_2)*a_3)*a_4$ $a_1*(a_2*(a_3*a_4))$
2. Numărul de posibilități de a triangulariza (partiționa în triunghiuri) un poligon cu n vârfuri cu ajutorul a n-3 diagonale care nu se intersectează (exceptând extremitățile) este Catalan(n-2). Exemplu : pentru n=5, pentagon, se obțin cele Catalan(3)=5 cazuri.

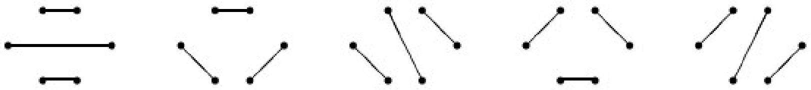
3. Numărul de arbori binari cu n noduri neetichetate este Catalan(n). Pentru n=3 se obțin:



4. Numărul de arbori binari cu 2n+1 noduri (sau cu n+1 frunze) este Catalan(n). Pentru n=3:



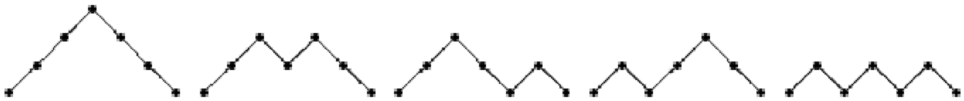
5. Numărul de moduri în care 2n persoane aşezate la o masă rotundă îşi pot strânge mâinile fără ca brațele lor să se intersecteze este Catalan(n) – în câte moduri pot fi unite 2n puncte aflate pe circumferința unui cerc fără ca liniile de unire să se intersecteze . Pentru n=3 se obține:



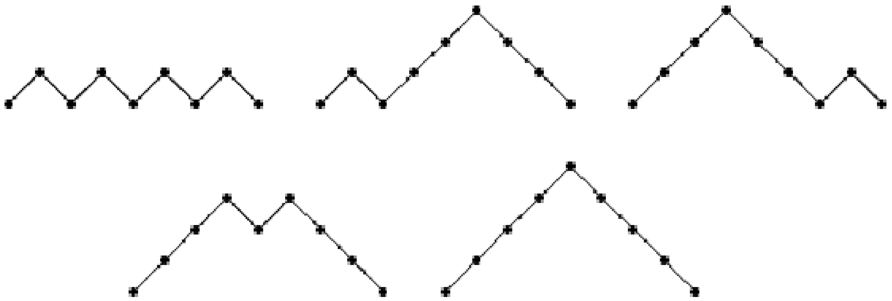
6. Numărul de moduri de a conecta 2n puncte aflate pe o linie dreaptă, prin n arce care să conecteze câte două puncte fără să se intersecteze şi arcele să nu fie decât deasupra liniei punctelor este Catalan(n). Pentru n=3 se obține:

Emanuela Cerchez
Marinel Şerban
Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

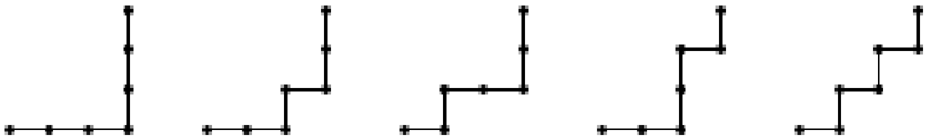
7. Numărul de profiluri montane distincte ce se pot desena cu ajutorul a `n` caractere `/` şi `n` caractere `\`, fără a coborî sub "nivelul mării" (linia orizontală care trece prin punctul de plecare) este `Catalan(n)`. Problema apare şi astfel: numărul de drumuri laticiale[1] dintre `(0,0)` şi `(0,2n)` cu paşi de forma `(1,1)` şi `(1,-1)`, fără a trece sub axa Ox este `Catalan(n)`. Pentru `n=3` se obține:



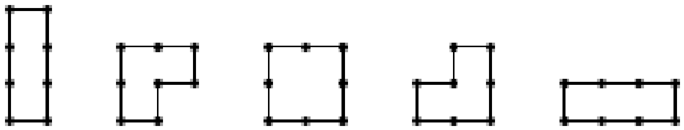
8. Problema apare şi astfel: numărul de drumuri laticiale dintre `(0,0)` şi `(0,2n+2)` cu paşi de forma `(1,1)` şi `(1,-1)`, fără a trece sub axa Ox fără vârfuri de înălțime `2` este `Catalan(n)`. Pentru `n=3` se obține:



9. Numărul de drumuri laticiale dintre `(0,0)` şi `(n,n)` cu paşi de forma `(1,0)` şi `(0,1)` care însă nu trec deasupra dreptei de ecuație `y=x` este `Catalan(n)`. Pentru `n=3` se obține:



10. Numărul de perechi de drumuri laticiale cu `n+1` paşi fiecare, pornind din `(0,0)` şi terminând în acelaşi punct fără să se întâlnească în alte puncte decât în punctele de început şi sfârşit, utilizând paşi de forma `(1,0)` şi `(0,1)` este dat de `Catalan(n)`. Pentru `n=3` se obține:



11. Numărul de combinații de `n` valori `1` şi `n` valori `-1`, astfel încât orice sumă parțială să fie pozitivă este dat de `Catalan(n)`. Pentru `n=3` există combinațiile:

    `1+1+1-1-1-1`   `1+1-1+1-1-1`   `1+1-1-1+1-1`   `1-1+1+1-1-1`   `1-1+1-1+1-1`

12. Numărul de secvențe de numere întregi $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ care au proprietatea $a_i \le i$ este dat de `Catalan(n)`. Pentru `n=3` există secvențele:

    `111`   `112`   `113`   `122`   `123`

13. Numărul de secvențe de numere întregi $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât $a_i \ge -1$, toate sumele parțiale sunt pozitive şi $a_1+a_2+...+a_n=0$, este `Catalan(n)`. Pentru `n=3` există secvențele:

    `0,0,0`   `0,1,-1`   `1,0,-1`   `1,-1,0`   `2,-1,-1`

14. Numărul de permutări ale mulțimii `1,2,...,2n` astfel încât:

[1] Drum laticial – drum care uneşte puncte laticiale – puncte de coordonate întregi

Emanuela Cerchez
Marinel Şerban
Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

a. `1,3,..,2n-1` apar în ordine crescătoare
b. `2,4,...,2n` apar în ordine crescătoare
c. `2i-1` este în fața lui `2i`, pentru `1≤i≤n`

este dat de `Catalan(n)`. Pentru `n=3` permutările sunt:

`123456    123546    132456    132546    135246`

15. Să considerăm o tablă de şah de dimensiune `(n+1)*(n+1)` şi o piesă plasată inițial într-un colț al tablei. O mutare constă în plasarea piesei în una dintre pozițiile alăturate (pe orizontală sau verticală). Numărul de drumuri distincte de lungime `2n` pe care le poate străbate piesa din colțul inițial în colțul opus, fără a intersecta diagonala principală este `Catalan(n)`.
16. Numărul de permutări ce se pot obține cu ajutorul unei stive în care se introduc succesiv numerele `1`, `2`, ..., `n` este `Catalan(n)`.
17. În documentul *Exercises on Catalan and Related Numbers, Cambridge University Press, Richard P_ Stanley, June 1998* există mai multe astfel de interpretări.

Problema 3. Problema mingilor de tenis

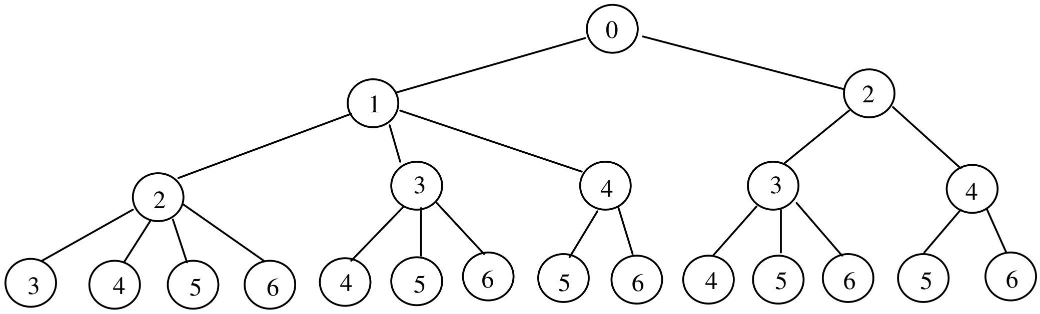
Într-un joc obişnuit de tenis, un jucător primeşte de fiecare dată `k=2` mingi pentru a servi şi serveşte una singură, pe care o alege el. Presupunând acum că mingile sunt numerotate `1, 2, ...` şi că jucătorul nu aruncă mingea (mingile) care i-au rămas, să se determine în câte moduri se poate constitui mulțimea mingilor servite după `n` servicii.

Un posibil mod de a servi mingile este:

Pas	Mingi primite	Mingi la dispoziție	Minge servită
1	1 şi 2	1 şi 2	1
2	3 şi 4	2, 3 şi 4	4
3	5 şi 6	2, 3, 5 şi 6	2
4	7 şi 8	3, 5, 6, 7 şi 8	6

deci după `n=4` servicii au fost servite mingile `(1, 4, 2, 6)`.

Putem figura grafic toate modalitățile de a servi mingile astfel:



- rădăcina `= 0` – nu s-a servit nici o minge
- pe nivelul `1` mingile care pot fi servite (mingea `1` sau mingea `2`) prima dată
- pe nivelul `2` pot fi servite:
  - mingile `2`, `3` sau `4` dacă prima minge servită a fost mingea `1`
  - mingile `3` sau `4` dacă prima minge a fost `2`
- pe nivelul `3` ...

Este clar că putem descrie astfel modul de servire a mingilor, în ordine crescătoare, deoarece toate combinațiile duc la formarea aceloraşi seturi de mingi, ordinea în care considerăm mingile servite nefiind importantă (combinația `1,4,2,6` este identică cu `1,2,4,6`). Astfel, componența unui set de mingi servite după `n` servicii este dată de o "ramură" a acestui arbore de la rădăcină până la un nod final.

Se observă că astfel s-au determinat **toate** combinațiile posibile dupa `n=3` servicii.

Emanuela Cerchez
Marinel Şerban
Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

Sintetizând, vom avea

n	număr posibilități
1	2
2	5
3	14
4	42
...	...

care nu sunt altceva decât numerele lui Catalan:

$$C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1} = \frac{C_{2n+1}^n}{2n+1}$$

Desigur, numerele lui Catalan, pentru `k=2` sunt:

n	C_n	valoare
1	C_1	1
2	C_2	2
3	C_3	5
4	C_4	14
5	C_5	42
...	...	...

ceea ce arată că pentru a obține rezultatul corect va trebui să considerăm pentru nivelul `n`, valoarea C_{n+1}.

În mod asemănător, dacă, în loc să primească câte `k=2` mingi, de fiecare dată jucătorul primeşte câte `k` mingi, se demonstrează că numărul de seturi de mingi care se pot forma este dat formula:

$$C_n^{(k)} = \frac{C_{kn}^n}{(k-1)n+1} = \frac{C_{kn+1}^n}{kn+1}$$

care se numeşte număr Catalan generalizat de ordin `k`.

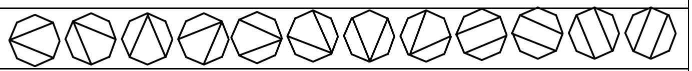
Numerele generalizate Catalan

Pentru k=2 se deduce

$$C_n^{(2)} = \frac{C_{2n}^n}{n+1} = \frac{C_{2n+1}^n}{2n+1}$$

adică numerele Catalan obişnuite.

Numerele Catalan generalizate reprezintă numărul de modalități de a împărți un poligon convex în `n` poligoane cu `k+1` laturi, care nu se intersectează, prin `n-1` diagonale care nu se intersectează.
Astfel pentru `k=3` vom obține:

n	număr diagonale (n-1)	număr laturi	$\frac{C_{2n+1}^n}{2n+1}$	Desene
1	0	4	$C_3^1/3$	
2	1	6	$C_6^2/5$	
3	2	8	$C_9^3/7$	
4	3	10	$C_{12}^4/9$	...
5	4	12	$C_{15}^5/11$	...

Emanuela Cerchez
Marinel Şerban
Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

Problema 4. Culmi

Lui Gigel îi place să se joace cu numerele. De data asta el se joacă numai cu numerele +1 şi -1. El pune pe hârtie, unul după altul, n numere +1 şi n numere -1, dar are grijă ca oricum ar aduna numere consecutive pornind de la primul număr pus pe hârtie să nu obțină o sumă negativă. Apoi Gigel figurează numărul +1 prin **/** iar numărul -1 prin **** şi obține nişte desene interesante. Astfel, pentru n=3, configurațiile corecte şi desenele pe care le obține Gigel arată în felul următor:

```
  /\
 /  \    /\      /\/\      /\
/    \  /  \/\  /    \  /\/  \  /\/\/\
+++---  ++--+-  ++-+--  +-++--  +-+-+-       (+ = +1; - = -1)
```

Evident, configurația

```
 /\
/  \
    \/
++---+
```

nu este corectă, deoarece la un moment dat suma devine -1.

Gigel observă faptul că aceste desene seamănă cu nişte munți şi, mai mult, observă că numărul de vârfuri ai "munților" diferă: unii au un vârf, alții au două vârfuri, iar alții chiar trei.

Cerință
Pentru n şi k date, determinați câți dintre "munții" corect formați cu n semne **/** şi n semne **** au exact k vârfuri.

Numerele Narayana

Am arătat că una dintre interpretările date numerelor Catalan este numărul de profiluri montane distincte ce se pot desena cu ajutorul a n caractere / şi n caractere \\, fără a coborî sub "nivelul mării" (linia orizontală care trece prin punctul de plecare). Pentru n=3 se pot construi profilele

```
        /\
       /  \    /\/\       /\     /\
      /    \  /    \   /\/  \  /  \/\   /\/\/\
```

Un **vârf** al unui astfel e profil montan este definit ca fiind o pereche **/**, adică un pas în sus urmat imediat de un pas în jos. În mod analog se poate defini o **vale** ca fiind o pereche **\\/**.

Numerele Narayana se definesc pentru n,k≥1 ca fiind

$$N(n,k) = \frac{1}{n} C_n^k C_n^{k-1} = \frac{1}{k} C_n^{k-1} C_{n-1}^{k-1}$$

cu N(0,0)=1 şi N(n,0)=0, N(n,1)=1 pentru n≥1, şi reprezintă exact numărul de "profile" montane formate din n caractere **/** şi n caractere **** fără a coborî sub "nivelul mării" (linia orizontală care trece prin punctul de plecare), care au exact k vârfuri, adică soluția problemei de mai sus.

Pentru exemplul dat se observă faptul că
N(3,1)=1, adică există 1 profil care are exact 1 vârf
N(3,2)=3, adică există 3 profile care au exact 2 vârfuri
N(3,3)=1, adică există 1 profil care are exact 3 vârfuri

Prin calcul direct se poate observa că numerele Narayana reprezintă o descompunere a numerelor Catalan astfel încât, pentru n≥0 este adevărată relația:

Emanuela Cerchez
Marinel Şerban
Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} N(n,k)$$

Câteva proprietăți ale numerelor Narayana :

$$N(n,k) = N(n, n-k+1)$$
$$C_{k+1}^{2} N(n+1,k+1) = C_{n+1}^{2} N(n,k)$$
$$C_{n}^{k-1} N(n,k+1) = C_{n}^{k+1} N(n,k)$$
$$C_{n-k+2}^{2} N(n+1,k) = C_{n+1}^{2} N(n,k)$$
$$(n+1)N(n,k) = (n-1)[N(n-1,k-1) - N(n-1,k)] + 2(C_{n-1}^{k-1})^2$$
$$N(n+1,k+1) = (C_n^k)^2 - C_n^{k-1} C_n^{k+1}$$

Numerele Narayana formează un triunghi în care suma elementelor pe linii reprezintă exact numere Catalan.

n	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	**Σ = C_n**
0	1								**1**
1	0	1							**1**
2	0	1	1						**2**
3	0	1	3	1					**5**
4	0	1	6	6	1				**14**
5	0	1	10	20	10	1			**42**
6	0	1	15	50	50	15	1		**132**
7	0	1	21	105	175	105	21	1	**429**

Aplicații

1. Naveta

(Balcaniada de Informatică, România, 2003)

Pe asteroidul BOI2003 trebuie transportați `n` cercetători cu ajutorul unei navete spațiale. Această navetă are însă câteva caracteristici constructive mai deosebite. Astfel, la plecarea de pe Terra ea trebuie să încarce exact `s` cercetători, iar la sosirea pe BOI2003 trebuie să debarce un singur cercetător, apoi trebuie să se întoarcă pentru a încărca alți exact `s` cercetători. Presupunând că cercetătorii sunt numerotați `1, 2, … ,` naveta va proceda astfel:

- la prima cursă încarcă de pe Terra cercetătorii `1, 2, ..., s` şi debarcă pe BOI2003 unul dintre aceştia;
- la cursa a doua încarcă de pe Terra cercetătorii `s+1, s+2, ..., 2s` şi debarcă pe BOI2003 unul dintre cercetătorii existenți în navetă;
- la cursa a treia încarcă de pe Terra cercetătorii `2s+1, 2s+2, ..., 3s` şi debarcă pe BOI2003 unul dintre cercetătorii din navetă;
- ...

După `n` curse pe asteroidul BOI2003 va exista o echipă formată din `n` cercetători.

Cerință
Să se determine numărul de posibilități de a forma echipa de cercetători.

Date de intrare
Pe prima linie a fişierului de intrare `naveta.in` se găsesc valorile `s` şi `n` separate prin exact un spațiu.

Date de ieşire
Prima linie a fişierului `naveta.out` va conține numărul `K` de posibilități de a forma echipa de cercetători.

Restricții

- `1 <= s <= 10`
- `1 <= n <= 40`

- la fiecare cursă sunt încărcați următorii `s` cercetători, **în ordinea numerotării lor**
- în navetă încap un număr nelimitat de persoane(!!!)

Exemplu

naveta.in	naveta.out
2 3	14

Timp maxim de execuție/test: 1 secundă

2. Expresii

(Olimpiada Țărilor Baltice 1999)

Fie `X` cea mai mică mulțime definită după regulile următoare:
– şirul vid aparține mulțimii `X`;
– dacă şirurile `A` şi `B` aparțin mulțimii `X`, atunci atât `(A)`, cât şi `AB` aparțin mulțimii `X`.
Elementele mulțimii `X` se numesc expresii corect parantezate.
De exemplu, următoarele şiruri sunt expresii corect parantezate:
`()(())()`
`(()(()))`
Următoarele şiruri nu sunt expresii corect parantezate:
`)))(()`
`())(()`
Fie `E` o expresie corect parantezată. Lungimea expresiei `E` este egală cu numărul de paranteze din `E`.
Adâncimea expresiei `E`, notată cu `D(E)`, este definită astfel:

$$D(E)=\begin{cases} 0 & \text{dacă E este şirul vid} \\ D(A)+1 & \text{dacă E = (A), şi A aparţine mulţimii X} \\ \max(D(A),D(B)) & \text{dacă E = AB, şi A, B aparţin mulţimii X} \end{cases}$$

Cerință
Scrieți un program care, pentru `n` şi `d` dați, să determine numărul de expresii corect parantezate de lungime `n` şi adâncime `d`.

Date de intrare
Fişierul de intrare `par.in` conține pe prima linie numerele naturale `n` şi `d`, separate printr-un spațiu.

Date de ieşire
Fişierul de ieşire `par.out` va conține o singură linie pe care se află numărul de expresii corect parantezate de lungime `n` şi adâncime `d`.

Restricții
`1 < n < 39`, `0<d<20`.

Exemplu

par.in	par.out	**Explicație**

6 2	3	Cele 3 expresii sunt:
		`(())()`
		`()(())`
		`(()())`

3. Divizori

(Pregătirea lotului național de informatică, 2004)

Aşa cum ştim, lui Gigel îi place să se joace cu cifrele. Într-o zi, jucându-se, a observat o proprietate foarte interesantă a unui şir de numere: şirul începe cu `1` şi se termină cu `1` şi oricare dintre celelalte numere din şir (toate ≥ `2`) divid suma vecinilor lor.
De xemplu, şirul `1 4 3 2 1` are această proprietate deoarece

- începe şi se termină cu `1`
- `4` divide `1+3`
- `3` divide `4+2`
- `2` divide `3+1`

Cerință

Emanuela Cerchez
Marinel Şerban
Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

Dat `n ≥ 3`, să se determine câte astfel de şiruri de `n` cifre se pot construi şi, de asemenea, să se determine un astfel de şir.

Date de intrare
Fişierul de intrare `divizori.in` conține pe prima linie numărul `n`.

Date de ieşire
Fişierul de ieşire `divizori.out` conține pe prima linie numărul de şiruri care se pot construi. Linia a doua conține un astfel de şir de numere, numerele din şir fiind separate unul de altul prin exact un spațiu.

Restricții
- `3≤ n ≤2500`

Exemple

divizori.in	divizori.out	Explicații
3	1 1 2 1	şirul care se poate construi este `1 2 1`
4	2 1 3 2 1	unul dintre şirurile care se pot construi este `1 3 2 1`

Timp maxim de execuție/test: 1 secundă

Bibliografie
1. Ioan Tomescu – Combinatorică şi teoria grafurilor, Bucureşti 1978
2. www.mathworld.wolfram.com
3. Richard P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Cambridge University, 1998
4. Donatella Merlini, The tennis ball problem, Rocquencourt, 2001
5. http://mathworld.wolfram.com/notebooks/Combinatorics/CatalanNumber.nb
6. http://mathforum.org/advanced/robertd/index.html
7. Tomislav Doslic – Morgan Trees and Dyck paths, University of Zagreb, Croatia, September 9, 2002
8. Christine E. Heitsch – A Combinatorial Approach to Single-Stranded Nucleotide Sequences, University of Wisconsin – Madison, September 14, 2004