Teoria jocurilor

Prof. Doru Popescu Anastasiu

1. Conceptul matematic de joc

Definitie
Prin *joc* vom vom intelege un sir de decizii (actiuni, mutari), luate de persoanele care participa, tinand cont de anumite regului stricte.

Definitie
O mutare este o functie f, definite pe multimea pozitiilor jocului si cu valori in aceeasi multime.
Daca p este o pozitie a jocului. Atunci f(p) este o noua pozitie a jocului, care se obtine dupa efectuarea unei mutari (actiuni) asupra pozitiei p.

Jocurile pot fi clasificate dupa mai multe criterii:
1. dupa numarul de jucatori
2. dupa natura mutarilor (mutari libere, intamplatoare)
3. dupa cantitatea de informatie (legata de mutarile anterioare)

Definitie
Se numeste *strategie a unuia dintre jucatori*, un ansamblu de reguli, care definesc in mod unic mutarile libere in functie de situatia concreta ivita.

Definitie
O strategie se numeste strategie sigura de castig, pentru unul din jucatori, daca acesta va castiga, indiferent de modul in care ar incerca adversarii sa-l opreasca.

2. Strategii de joc

Cele mai multe jocuri pe care le vom folosi pentru a exemplifica anumite strategii de joc vor fi cu doi jucatori.

2.1 Strategia simetriei

Aceasta strategie se bazeaza pe faptul ca unul dintre jucatori imita mutarea adversarului simetric fata de o axa de simetrie sau fata de un centru de simetrie. Astfel la unele jocuri este necesar sa se gaseasca o axa de simetrie, iar la altele un centru de simetrie. Acest lucru depinde de regulile jocului.

Daca jucatorul imitat mai are de efectuat o mutare, atunci si imitatorul va avea de efectuat o mutare, deci jocul se va termina cand cel imitat nu mai are posibilitatea de a muta.
In unele situatii, imitatorul va efectua prima mutare, impartind jocul in doua parti congruente (din punct de vedere al posibilitatilor de a efectua mutari), iar apoi daca adversarul va juca intr-o parte, el va efectua mutarea in cealalta parte.

Aplicatii

1. *O banda de hartie este impartita in n casute. Alternativ doi jucatori X si Y hasureaza cate k casute adiacente, nehasurate. Cel care nu mai poate muta pierde. Initial muta X. Se stie ca n si k au aceeasi paritate. Se cere:*

a) *Sa se determine daca jucatorul X are strategie sigura de castig.*
b) *In caz afirmativ se cere sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la intrare.*

Solutie
Initial X va hasura casutele din centrul benzii, impartind in acest fel banda de hartie in doua benzi de dimensiuni egale, putand in acest fel sa imite simetric mutarile lui Y.

2. *Fie o tabla dreptunghiulara impartita in n*m casute. Pe rand, doi jucatori X si Y Hasureaza cate doua casute adiacente, nehasurate pana in acel moment. Cel care nu mai poate muta pierde. Initial muta jucatorul B. Cel putin unul dintre numerele m, n este un numar par. Se cere:*

a) *Sa se determine daca jucatorul X are strategie sigura de castig.*
b) *In caz afirmativ se cere sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la tastatura.*

Solutie
Vom cauta o axa de simetrie (pentru ca cel putin unul dintre m si n este par). Sa incercam sa alegem axa de simetrie, linia care este paralela cu marginea tablei care are un numar impar de patratele (daca aceasta exista) si este egal distantata de cele doua margini. Daca Y joaca de o parte a axei de simetrie, X va juca in cealalta parte, dar daca Y va hasura doua patratele, unul de o parte a axei, iar celalalt de cealalta parte, atunci X nu mai are cum sa il imite simetric, de aceea este evidenta existanta unei noi axe de simetrie, lucru care este posibil, doar daca ambele numere n, m sunt pare. Daca doar unul din numerele n, m este par, atunci Y, va putea hasura primele doua patratele pe linia (coloana) din centru, avand o patratica de o parte a axei, iar cealalta patratica de cealalta parte a axei, iar apoi va imita simetric mutarile lui X.
In concluzie, X are strategie sigura de castig, daca ambele numere n, m sunt pare, iar o pozitie (p,q), va avea simetrica de coordonate (n+1-p,m+1-q).

2.2 Strategia perechilor

Ideea strategiei consta in gruparea mutarilor pe perechi de mutari. La fiecare pas, unul din jucatori va putea efectua mutarea pereche a mutarii efectuate de adversar.
Unele jocuri din aceasta categorie necesita acoperirea tablei de joc cu Domino-uri, la fiecare mutare unul din jucatori, va actiona in cel de-al doilea patratel al unui Domino, primul patratel fiind actionat de celalt jucator, la mutarea anterioara. Alte jocuri necesita acoperirea tablei cu asa numitele Dominouri virtuale, care sunt alcatuite tot din doua patratele, dar care nu sunt alaturate, ca si in cel standard (spre exemplu jocul *saritura calului*).

Ca si in strategia simetriei, este posibil ca prima mutare sa nu poata fi imperecheata, cu o alta mutare, dar apoi (dupa ce aceasta mutare este efectuata) sa fie posibil realizarea acestui lucru.

Aplicatii

*1. Se da o foaie de hartie dreptunghiulara, impartita in n*m casute. Alternativ, doi jucatori X si Y decupeaza una din casutele care este invecinata pe orizontala, sau vericala cu ultima casuta decupata. Cel care nu mai poate muta pierde. Initial muta X, si va decupa o casuta oarecare. O casuta poate fi decupata o singura data, deci nu este permisa parcurgerea de doua ori a aceeasi casute. Se cere:*

a) *Sa se determine daca X are strategie sigura de castig.*
b) *In caz afirmativ sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la intrare.*

Solutie

Ideea de baza este gruparea mutarilor pe perechi. In acest caz Domino-ul este chiar cel standard, deci trebuie sa incercam sa acoperim tabla cu astfel de piese. Daca tabla are un numar impar de casute, atunci nu este posibila o acoperire completa a acesteia, dar in scimb o putem acoperi, daca eliminam, spre exemplu coltul din stanga sus, deoarece pe linia 1, vom ramane cu un numar par de casute, pe care le putem acoperi complet, fara sa suprapunem piese, iar in rest mai ramane o suprafata dreptunghiulara care are un numar par de casute, care pot fi acoperite cu Domino-uri.

Daca tabla are un numar par de casute, atunci cel de-al doilea jucator (Y) are strategie sigura de castig, deoarece la fiecare pas, va juca in acea casuta, care se afla sub acelasi Domino cu casuta decupata de X.

Daca tabla are un numar impar de casute, atunci jucatorul care muta primul (X) are strategie sigura de castig, initial el decupand casuta care nu a fost acoperita de nici un Domino, apoi la fiecare pas decupand casuta pereche casutei decupate de Y.

*2. Se da o foaie de hartie dreptunghiulara, impartita in n*n casute. Alternativ, doi jucatori X si Y decupeaza una din casutele care este L-invecinata cu ultima casuta decupata. Doua casutese numesc L-invecinate, daca exista o saritura a calului care sa treaca de la una la alta (dintr-o singura mutare). Cel care nu mai poate muta pierde. O casuta poate fi decupata o singura data, deci nu este permisa parcurgerea de doua ori a aceleiasi casute. Se cere:*
a) *Sa se determine daca X are strategie sigura de castig.*
b) *In caz afirmativ sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la intrare.*

Solutie

O mutare este identica cu o saritura a calului, intr-o pozitie noua, neparcursa. Trebuie sa gasim o impartire a casutelor tablei in perechi, astfel incat fiecare casuta sa faca parte dintr-o singura pereche. Sa definim o pereche de casute, ca fiind doua casute astfel incat un cal poate sa sara direct de pe una pe alta. Deci daca reusim sa gasim un drum al calului, care sa treaca o singura data prin fiecare casuta, atunci problema este rezolvata, deoarece casuta cu numar de ordine impar in cadrul drumului, va fi prima casuta a Domino-ului in forma de L, definit anterior, iar casutele cu numar de ordine par vor fi cea de-a doua casuta a Domino-ului.

Pentru n par, jucatorul Y are strategie sigura de castig, la fiecare pas el jucand in casuta pereche celei in care a jucat X.

Pentru n impar, jucatorul X are strategie sigura de castig, initial el decupand pozitia din centru, apoi la fiecare pas va juca mutarea pereche a mutarii executate de Y.

Determinarea unui drum al calului care sa treaca o singura data prin fiecare casuta, se face prin urmatorul procedeu:

- Se pleaca din pozitia (1,1). Se poate pleca la fel de bine din orice alta pozitie.
- La fiecare pas se sare in acea casuta din care sunt cele mai putine posibilitati de a sari, mai putin in casuta din centru.

2.3 Strategia paritatii

Denumirea acestei strategii vine de la existenta celor doua tipuri de pozitii (para, respectiv impara) in care se poate afla la un moment dat jocul (partida). Ele sunt definite, in avantajul unuia dintre jucatori (sa-l numim pe acesta X, iar pe celalat Y), astfel la fiecare pas, jucatorul X, va putea face o mutare convenabila care sa transforme o pozitie de joc impara intr-o pozitie de joc para. Spre deosebire de X, jucatorul Y, va putea sa treaca la fiecare mutare, doar dintr-o pozitie para intr-una impara. Starea finala a jocului este o pozitie para.

Sa presupunem ca avem de aface cu un joc, care indeplineste (printre altele) si urmatoarele conditii:

1. Se joaca intre doi parteneri, care muta alternativ. Cel care nu mai poate muta pierde.
2. Putem defini, o partitie cu doua clase (A si B) a multimii pozitiilor jocului, astfel incat:

a) Pozitia finala sa apartina multimii A.
b) Orice mutare aplicata unei pozitii din A, va transforma aceasta pozitie intr-o pozitie din B. Pentru pozitia finala nu exista nici o mutare care sa o transforme intr-o alta pozitie.
c) Exista o mutare convenabila, care realizeaza transformarea unei pozitii din B intr-o pozitie din A.

In aceste conditii va castiga (daca joaca fara greseli) acel jucataor care la momentul in care este la mutare va gasi jocul intr-o pozitie impara. Pentru a castiga el trebuie sa treaca intr-o pozitie para, lucru posibil, datorita modului cum am definit aceste pozitii. Indiferent ce va face adversarul (jucatorul Y), persoana X, va castiga.

Aplicatii

1. *Se da o stiva cu n monede. Alternativ, doi jucatori X si Y pot extrage din stiva maxim k monede. Cel care nu mai poate muta, pierde. Initial muta X. Se cere:*

a) Sa se determine daca X are strategie sigura de castig.
b) In caz afirmativ sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la intrare.

(Jocul Bachet, 1612)
Solutie
Strategia castigatoare se bazeaza tot pe impartirea jocului in doua multimi disjuncte, si anume:

- pozitia para se defineste ca fiind acel **n**, cu proprietatea ca **n** mod (**k**+1)=0
- pozitia impara se defineste ca fiind acel **n**, cu proprietatea ca **n** mod (**k**+1)<>0

Avem teoremele:

Teorema 1
In urma oricarei mutari, aplicate unei pozitii pare, se trece intr-o pozitie impara.
Demonstratie
Mutarea para este caracterizata de faptul ca n mod (k+1)=0. La fiecare pas putem extrage p monede, p cuprins intre 1 si k. Atunci:
(n-p) mod (k+1) = n mod (k+1) – p mod (k+1) = 0-p mod (k+1) <>0.
Rezulta ca pozitia in care se trece este o pozitie impara.

Teorema 2
Dintr-o pozitie impara, se poate trece, in urma unei mutari convenabile, intr-o pozitie para.
Demonstratie
Sa presupunem ca in stiva avem n monede. Cea mai apropiata pozitie para (si mai mica decat n) este n-(n mod (k+1)). In aceasta pozitie putem trece, daca extragem n mod (k+1) monede.
Deci jucatorul X fiind primul la mutare, va castiga (mutand correct, fara greseli) daca n mod (k+1)<>0.
Observatie
Problema poate fi incadrata si la strategia perechilor, fiecarei mutari a jucatorului Y ii corespunde mutarea pereche a lui A, care trece jocul intr-o pozitie para.

2. *Se da o stiva cu n monede. Daca numarul monedelor din stiva, este mai mare decat un numar natural dat p, atunci din stiva se pot extrage maxim k1 monede, in caz contrar putandu-se extrage maxim k2 monede. Pe rand doi jucatori X si Y, extraga din stiva monede, respectand conditia de mai sus. Initial muta X. Se cere:*

a) *Sa se determine, daca jucatorul X are strategie sigura de castig.*
b) *In caz afirmativ, sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la intrare.*

Solutie

Sa determinam cel mai mare numar natural w, mai mic sau egal cu p, astfel incat w mod (k2+1) =0. Deci cel care va ajunge sa ia primul din stiva cu w monede, va pierde. Deci pentru ca Y sa fie obligat sa extraga dintr-o stiva cu w monede, X va trebui sa mute in asa fel incat sa lase in stiva w monede. Asta inseamna ca X trebuie sa castige pentru o stiva de n-w monede, din care se pot extrage la fiecare pas, maxim k1 monede, lucru realizabil doar daca n-w este multiplu de k1+1.

2.4 Programare dinamica

Aplicatii

1. Doua persoane X si Y joaca urmatorul joc. Dintr-o gramada de n obiecte, cei doi jucatori iau pe rand maxim m obiecte. Initial muta X, si va castiga daca la final are un numar par de obiecte. Se cere:
a) Sa se determine, daca jucatorul X are strategie sigura de castig.
b) In caz afirmativ, sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la intrare.

Solutie

Sa vedem de ce este caracterizata o stare a jocului, si ce trebuie sa tina minte jucatorul X. Observam ca este suficient ca el sa tina minte 3 lucruri:
1. cate obiecte au mai ramas in gramada;
2. daca numarul obiectelor pe care le are este par;
3. cine este la mutare.

In fiecare astfel de stare jucatorul poate sa faca maxim m mutari diferite. Fiecare mutare va trimite jocul intr-o noua stare in care va juca partenerul.

Vom construi un tablou a cu n+1 linii si 4 coloane, care au semnificatia urmatoare :
- coloana 1 indica faptul ca X are un numar par de obiecte si X este la mutare;
- coloana 2 indica faptul ca X are un numar par de obiecte si Y este la mutare;
- coloana 3 indica faptul ca X are un numar impar de obiecte si X este la mutare;
- coloana 4 indica faptul ca X are un numar impar de obiecte si Y este la mutare.

In fiecare casuta a matricii vom pune true, daca in cazul in care jocul incepe din acea pozitie X are strategie sigura de castig.

Incepem completarea matricei cu linia 0, care va fi de forma : true, true, false, false. Mai departe completarea se face in felul urmator :
1. Daca X este la mutare (adica o coloana dintre 1 si 3), atunci in ea se pune:
- true, daca exista cel putino mutare care sa duca la o casuta completata cu true;
- false, altfel.

2. Daca Y este la mutare (adica o casuta de pe coloana 2 sau 4), atunci in ea vom pune:
- false, daca exista cel putin o mutare, care sa duca la o casuta completata cu false;
- true, altfel.

2. Se da o stiva avand n monede colorate in doua culori. Pe rand doi jucatori X si Y extrag din stiva oricate monede (cel putin una) dar la fiecare mutare toate monedele extrase trebuie sa aiba aceeasi culoare. Cel care nu mai poate muta pierde. Initial muta X. Se cere:
1. Sa se determine, daca jucatorul X are strategie sigura de castig;
2. In caz afirmativ, sa se programeze mutarile lui X, cele ale lui Y fiind citite de la intrare.
Datele se citesc dintr-un fisier text, avand structura:
- *pe prima linie numarul de monede din stiva;*

- *pe urmatoarele n linii, se dau culorile monedelor din stiva; pe prima linie se afla culoarea celei mai de sus monede, etc.*

Solutie

Construim un vector cu n elemente de tip boolean, avand semnificatia ca pe pozitia k, vom avea true, daca jucatorul care extrage moneda respectiva are strategie sigura de castig. Modul de constructie este urmatorul (presupunem ca vectorul pe care il construim este c):

- c[1]=true;

Cel care va lua moneda cea mai de jos castiga. Datele vor fi citite in asa fel incat pe pozitia 1 se afla cea mai de jos moneda, etc.

- daca pe pozitia k, se afla o moneda de culoare diferita decat cea de sub ea (moneda k-1), atunci c[k]=not(c[k-1]) ;
- daca pe pozitia k, se afla o moneda de aceeasi culoare cu cea de sub ea (moneda k-1), atunci c[k]=true.

Jucatorul X va avea strategie sigura de castig, daca c[n]=true, el extragand la fiecare pas, atatea monede incat pentru prima moneda extrasa din Y sa avem in vectorul c false.

Bibliografie

1. Mihai Oltean, Programarea jocurilor matematice, Ed. Albastra
2. C. Ciucu, M. Iosifescu, R. Theodorescu, Teoria Jocurilor, Ed. Tehnica, 1965
3. N. Oprisiu, Olimpiada Jocurilor Rationale, Ed. Dacia, 1984
4. Probleme de Matematica traduse din revista sovietica KVANT, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983