Tablouri Young şi involuții

Definiție

Se dau m numere naturale $n_1, n_2, \ldots, n_m$ cu proprietatea $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m > 0$. Se numeşte *tablou Young* de forma $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ o aranjare a $n_1+n_2+\ldots+n_m$ numere întregi distincte într-un tablou cu elementele liniilor aliniate de la stânga la dreapta, fiecare linie i având n_i elemente ($1 \leq i \leq m$) în ordine crescătoare de la stânga la dreapta, iar elementele de pe aceeaşi coloană sunt în ordine crescătoare de sus în jos. Un exemplu de *tablou Young* pentru $m=4$, $n_1=6$, $n_2=4$, $n_3=4$, $n_4=1$ este următorul:

1	2	5	9	10	15
3	6	7	13		
4	8	12	14		
11					

Noțiunea anterioară a fost introdusă prima dată de Alfred Young ca ajutor în studiul matricelor de permutări (1928).

Definiție

O *involuție* este o permutare egală cu inversa sa. De exemplu există zece involuții ale mulțimii {1, 2, 3, 4}:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

Ar putea părea ciudat că discutîm în acelaşi timp şi despre tablouri şi despre involuții, dar există o legătură neaşteptată între aceste concepte aparent neânrudite: numărul de involuții ale lui {1, 2, …, n} este acelaşi cu numărul de tablouri care pot fi formate cu elementele 1, 2, …, n. De exemplu pornind de la {1, 2, …, n} se pot forma exact zece tablouri ce corespund celor zece involuții, şi anume:

1	2	3	4

1	3	4
2		

1	4
2	
3	

1	3
2	
4	

1	2	4
3		

1	2
3	
4	

1	2	3
4		

1	3
2	4

1	2
3	4

1
2
3
4

Această legătură între involuții şi tablouri nu este aşa de evidentă, acest lucru va decurge din rezultatele pe care le vom prezenta în continuare.

În continuare vom prezenta un algoritm care permite inserarea unui număr într-un tablou Young, interschimbând eventual elementele tabloului obținând tot un tablou Young.
Să prezentăm ideea algoritmului pentru inserarea numărului 8 în tabloul Young de mai jos:

1	3	5	9	12	16
2	6	10	15		
4	13	14			
11					
17					

(1)

Vom începe prin a-l plasa pe 8 pe linia 1, în locul ocupat în prezent de 9, pentru că 9 este cel mai mic element mai mare decât 8. Elementul 9 este "împins în jos" în linia 2, unde îl înlocuieşte pe 10. Atunci, 10 îl "împinge în jos" pe 13 de pe linia 3 pe linia 4; şi, pentru că linia 4 nu conține nici un element mai mare decât 13, procesul se încheie prin inserarea lui 13 la capătul din dreapta a liniei 4. Astfel tabloul s-a transformat în:

1	3	5	8	12	16
2	6	9	15		
4	10	14			
11	13				
17					

(2)

Descrierea anterioară este sufiecientă pentru a putea scrie un algoritm care inserează un număr x într-un tablou Young (x este diferit de toate elementele tabloului) astfel încât să se obțină tot un tablou Young de aceeaşi formă ca cel de dinainte.

Este posibilă şi operația inversă, de ştergere a unui număr dintr-un tablou Young cunoscând poziția (linia şi coloana) unde s-a pus un nou număr după inserare (înainte de această operație nefiind nimic).
Descriem etapele algoritmului pentru tabloul anterior cu poziția pe care înainte de inserare nu era număr: linia 4 coloana 2 pe care se află numărul 13.
Numărul 13 a fost împins în jos de pe linia 3 coloana 2 de către 10, pentru că 10 pe linia respectivă este elementul cel mai mare, mai mic decât 13; similar, 10 trebuie să fi fost împins în jos de pe linia 2 de cître 9, iar 9 trebuie să fi fost împins în jos de pe linia 1 de către 8. Astfel, putem trece de la tabloul (1) la tabloul (2).

Se poate demonstra uşor că cei doi algoritmi prezentați pe exemplele anterioare sunt corecți (folosind metoda inducției matematice). Aceşti algoritmi ne ajută să demonstrăm următoarea teoremă.

Teoremă
Există o bijecție între mulțimea tuturor permutărilor lui $\{1,2,\ldots,n\}$ şi mulțimea perechilor ordonate (P,Q) de tablouri Young formate cu elementele mulțimii $\{1,2,\ldots,n\}$, unde P şi Q au aceeaşi formă.
Demonstrație
Să considerăm o permutare p a mulțimii $\{1,2,\ldots,n\}$ care face să-i corespundă lui i numărul p[i], $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.
Vom construi două tablouri Young P şi Q, unde elementele lui P sunt numerele p[1], p[2],…, p[n], iar cele ale tabloului Q numerele 1, 2, …, n.
Fie P şi Q inițial vide. Atunci, pentru i=1, 2, …, n (în această ordine), se efecetuează următoarele operații:
- se inserează p[i] în tabloul P utilizându-se algoritmul prezentat mai sus
- se face atribuirea Q[s,t]:=i, unde s şi t reprezintă poziția noului element inserat în P.

Exemplu:
Pentru permutarea:

1	2	3	4	5
4	1	5	3	2

obținem:

Se inserează 4

P		Q	
7		1	

Se Inserează 1

P		Q	
1		1	
4		2	

Se inserează 5

P		Q	
1	5	1	3
4		2	

Se inserează 3

P		Q	
1	3	1	3
4	5	2	4

Se inserează 2

P		Q	
1	2	1	3
3	5	2	4
4		5	

Este clar din construcție că P şi Q vor avea întotdeauna aceeaşi formă; mai mult, pentru că adăugăm mereu elemente la periferia lui Q, în ordine crescătoare, Q este tablou Young.

Reciproc, dacă se dau două tablouri de aceeaşi formă P şi Q, putem găsi permutarea corespunzătoare. Astfel avem:
Pentru i:=n, n-1, …, 2, 1 (în această ordine), luăm p[i] numărul din P care se elimină din tablou ce corespunde poziției (s,t) din tabloul Q, care conține pe i.
Se pot urmări acete operații pe exemplul anterior de jos în sus, până se opțin tablori vide.

Datorită faptului că algoritmii de inserare şi eliminare sunt inverşi unul altuia, cele două construcții pe care le-am descris sunt şi ele inverse una alteia, deci am stabilit o corespondență bijectivă.

Din acestă demonstrație se obține următoarea:

Teoremă
Dacă permutarea:

1	2	…	n
a[1]	a[2]		a[n]

corespunde tablourilor Young (P,Q) din construcția teoremei anterioare, atunci permutarea inversă corespunde lui (Q,P).

Consecință
Numărul tablourilor Young care pot fi formate pornind de la {1, 2, …,n} este egal cu numărul involuțiilor mulțimii {1, 2, …,n}.

Aplicații:
Problemele DEPOT şi TWOFIVE de la IOI 2001.

Bibliografie:
Donald E. Knuth, Arta programării calculatoarelor, vol 3, Sortare şi Căutare, Ed. Teora, 2002.